Zeszyty Naukowe Wydziału Informatycznych Technik Zarządzania
Wyższej Szkoły Informatyki Stosowanej i Zarządzania
„Współczesne Problemy Zarządzania”
Nr 1/2010

WYCENA OBLIGACJI KATASTROFICZNEJ WRAZ Z SYMULACJAMI NUMERYCZNYMI

Piotr Nowak, Maciej Romaniuk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk, Warszawa
piotr.nowak@ibspan.waw.pl, maciej.romaniuk@ibspan.waw.pl

Klasyczny model ubezpieczeniowy związany jest z występowaniem częstych, ale niewielkich i niezależnych szkód. Tymczasem katastrofy naturalne powodują szkody rzadko występujące, o dużych wartościach, zależne geograficznie i czasowo. Dlatego coraz częstsze katastrofy naturalne skutkują problemami ze stabilnością finansową ubezpieczycieli. W związku z tym przydatne może być wykorzystanie jednocześnie różnych instrumentów finansowych i ubezpieczeniowych w postaci jednego, zintegrowanego portfela. Jednym z tego typu instrumentów mogą być obligacje katastroficzne (w j. ang. *catastrophe bonds*). W artykule przedstawiamy przykład takiej obligacji wraz z metodą jej wyceny oraz analizą własności z wykorzystaniem symulacji metodami Monte Carlo.
Słowa kluczowe: obligacje katastroficzne, metoda martyngałowa, symulacje Monte Carlo

1. Wprowadzenie

Występowanie coraz częstszych katastrof naturalnych, takich jak huragany, trzęsienia ziemi czy powodzie, skutkuje również zwiększającymi się stratami finansowymi i materialnymi. Przykładem mogą być tutaj szkody wynikłe z huraganu Andrew (1992), oceniane na 30 mld dolarów (patrz np. Muermann, 2008). W Polsce problemem są z kolei katastrofalne powodzie, które w roku 2010 nawet kilkakrotnie nawiedzały pewne rejony naszego kraju.

Istnieje wiele przyczyn wzrostu wielkości strat materialnych spowodowanych katastrofami naturalnymi. Jak wskazują niektórzy badacze, częstość występowania niektórych zdarzeń może mieć źródło w zmianach klimatycznych i zjawisku globalnego ocieplenia. Rosnąca wartość szkód może być również spowodowana zwiększeniem gęstości zaludnienia na zagrożonych obszarach (np. brzegach wylewających rzek, blisko linii brzegowej oceanu), jak również błędami w zagospodarowaniu przestrzennym, czy też ubóstwem i zaniedbaniem infrastruktury zabezpieczającej przed negatywnymi skutkami katastrof naturalnych, takimi jak tamy i wały przeciwpowodziowe w przypadku powodzi. Oprócz strat ludzkich, ubożenia społeczeństwa, czy bezpośrednich strat w infrastrukturze, katastrofy naturalne mają też negatywny wpływ na stabilność finansową ubezpieczycieli. Po huraganie Andrew ponad 60 przedsiębiorstw ubezpieczeniowych miało problemy ze swoją płynnością finansową (patrz np. Muermann, 2008). Wynika to nie tylko z ogromnej wartości samych strat, ale również z faktu, iż klasyczne mechanizmy ubezpieczeniowe (patrz np. Borch, 1947) nie są dobrze przystosowane do szkód wynikających z występowania dużych katastrof naturalnych (patrz np. Ermoliev i in., 2001).

Klasyczny model ubezpieczeniowy związany jest z występowaniem częstych, ale niewielkich i niezależnych szkód, takich jak odszkodowania wynikające z uszkodzeń samochodów w stłuczkach, pokrycie strat spowodowanych zalaniem mieszkania przez sąsiada lub pojedynczym włamaniem do domu. Dlatego standardowy portfel ubezpieczeniowy budowany jest zgodnie z zasadą: im więcej (heterogenicznych, czyli różnorodnych) ryzyk, tym lepiej dla ubezpieczyciela (patrz np. Borch, 1947; Ermoliev i in., 2001), tzn. tym mniejsze jest prawdopodobieństwo jego bankructwa. Dzięki zastosowaniu odpowiedniej, klasycznej metodologii, np. rachunku prawdopodobieństwa i centralnego twierdzenia granicznego, możliwe jest wyznaczenie składki ubezpieczeniowej i oszacowanie prawdopodobieństwa bankructwa ubezpieczyciela w przypadku danego portfela ryzyk, czyli tzw. ryzyka ruiny.

Tymczasem katastrofy naturalne powodują szkody rzadko występujące, o dużych wartościach, zależne geograficznie i czasowo – pojedyncze trzęsienie ziemi może zniszczyć jednocześnie wiele domów, ulic, fabryk, samochodów, itd., może również wzniecić pożary, spowodować podtopienia lub doprowadzić do licznych kradzieży i dalszych dewastacji mienia. W podobny sposób można patrzeć na skutki powodzi, które oprócz podtopień i bezpośredniego zniszczenia całych regionów kraju mogą skutkować np. kradzieżami, stratami w produkcji rolniczej w dłuższej perspektywie czasu (pola nienadające się do użytku po ich zalaniu), itd. Dlatego tradycyjne podejście ubezpieczeniowe stosowane przy budowie portfela (więcej ryzyk to lepszy portfel) może prowadzić bezpośrednio do bankructwa ubezpieczyciela (patrz np. Ermoliev i in., 2001).

Oczywiście, oprócz negatywnego wpływu na ubezpieczycieli, katastrofy naturalne mają również istotny wpływ na budżety samorządów, a nawet rządów państw. W szczególności dotyczy to sytuacji, w których znaczna część podmiotów (zarówno przedsiębiorców, jak i obywateli) nie ubezpiecza się przed skutkami potencjalnie poważnych katastrof naturalnych. Uważają bowiem oni, że rekompensata ich strat jest obowiązkiem władzy (lokalnej lub centralnej). Powoduje to, że budżety samorządowe i centralne narażone są na nagłe, niespodziewane i wysokie wydatki lub wzrost niezadowolenia społecznego. Przykładem może być tutaj sytuacja wynikła po powodziach w Polsce w roku 2010.

W związku z powyższym, przydatne może być wykorzystanie równocześnie innych instrumentów finansowych i ubezpieczeniowych w postaci jednego, zintegrowanego portfela, przez ubezpieczyciela lub np. przez samorząd. Jednym z takich instrumentów mogą być obligacje katastroficzne (w j. ang. *catastrophe bonds, cat bonds* lub *Act-of-God bonds*, patrz np. Ermolieva i in., 2007; Nowak i in., 2008;

Nowak i Romaniuk, 2009; Romaniuk i Ermolieva, 2005). W celu konstrukcji tego typu portfela i analizy jego właściwości niezbędna jest wycena odpowiedniego typu instrumentów finansowych, m.in. właśnie obligacji katastroficznych. Również rozwiązaniem problemu narażenia budżetów samorządów i rządu centralnego na „przerzucenie kosztów" przez osoby nieubezpieczone mogą być wspomniane hierarchiczne skonstruowane portfele złożone z instrumentów finansowych i ubezpieczeniowych, np. obowiązkowego ubezpieczenia, obligacji katastroficznej, pomocy rządowej i zagranicznej. W takim przypadku wykorzystanie każdego kolejnego składnika portfela zależy od przekroczenia odpowiednich poziomów wartości przez straty spowodowane katastrofą (patrz np. Nowak i Romaniuk, 2009).

W niniejszym artykule analizujemy pewien przykład obligacji katastroficznej. W punkcie 2 przedstawiamy ogólny zarys problematyki obligacji katastroficznych. Punkt 3 artykułu poświęcony jest prezentacji przykładu takiej obligacji oraz jej wyceny dla uogólnionego modelu Vasicka stopy procentowej. Zastosowanie wspomnianego modelu, będącego szczególnym przypadkiem modelu Hulla – White'a, pozwala na dokładne dopasowanie dynamiki stopy procentowej do początkowej struktury terminowej. Do wyceny obligacji stosujemy metodę martyngałową. W punkcie 4 przedstawiamy wyniki analizy właściwości tej obligacji katastroficznej, wykorzystując przy tym symulacje numeryczne. Ostatni, piąty punkt artykułu zawiera podsumowanie uzyskanych wyników.

2. Obligacje katastroficzne

Pojedyncza, poważna katastrofa naturalna może powodować straty rzędu nawet 50 – 100 miliardów dolarów. Może to skutkować problemami ze stabilnością finansową ubezpieczycieli (patrz np. Cummins i in., 2002) i prowadzić do ich bankructwa. Tymczasem wartości dziennych zmian na światowych rynkach finansowych sięgają dziesiątków miliardów dolarów. Dlatego stworzone zostały instrumenty finansowe, których zadaniem jest „przepakowanie" ryzyka związanego ze szkodami spowodowanymi katastrofami naturalnymi do postaci zestandaryzowanych instrumentów finansowych, którymi można handlować na rynkach finansowych w sposób płynny. Instrumenty takie transferują ryzyko i odpowiednie przepływy pieniężne pomiędzy rynkami ubezpieczeniowymi a rynkami finansowymi. Ich przykładem są obligacje katastroficzne (patrz np. Cox i in., 2000; George, 1999; Nowak i in., 2008; Nowak i Romaniuk, 2009; Romaniuk i Ermolieva, 2005). Zostały one wprowadzone na rynki w latach 90-tych ubiegłego wieku i stały się popularne po roku 1997, kiedy to USAA, firma ubezpieczeniowa z Teksasu, wyemitowała dwie nowe klasy obligacji katastroficznych: A-1 i A-2. Rynek obligacji katastroficznych wykazuje ciągłą tendencję wzrostową, np. w roku 2002 miał wartość 1,22 mld $, a w roku 2003 – 1,73 mld $. Przewidywany jest dalszy dynamiczny rozwój tego rynku.

Wypłaty w przypadku obligacji katastroficznych zależą od dwóch zmiennych: zachowania się pewnego instrumentu podstawowego (np. stopy procentowej LIBOR, podobnie jak w przypadku klasycznych obligacji) oraz wystąpienia ustalonego zdarzenia (np. pewnego typu katastrofy naturalnej) dla ściśle określonego terytorium i okresu czasowego. Zdarzenie takie nazywa się *triggering point* i zmienia ono strukturę wypłat obligacji katastroficznej. W przypadku obligacji A-1 oprocentowanie wypłat związane było ze stopą procentową i było równe LIBOR plus 282 punkty bazowe. Triggering point był określony jako przekroczenie sumy 1 mld $ przez wartość roszczeń ubezpieczonych względem USAA, spowodowanych huraganem na wschodnim wybrzeżu USA pomiędzy 15.07.1997 a 31.12.1997. Gdyby suma ta została przekroczona, kupon obligacji A-1 nie zostałby wypłacony.

Triggering point może być związany z różnorodnymi zdarzeniami katastroficznymi i miarami dla nich, takimi jak siła trzęsienia ziemi mierzona w skali Richtera, wysokość powodzi, poziom wód opadowych (patrz np. Nowak i in., 2008), indeks strat przemysłu ubezpieczeniowego, estymowana modelem wielkość szkód wywołanych katastrofą naturalną, itd. Zazwyczaj przepływy finansowe związane z obligacją katastroficzną zarządzane są przez specjalny fundusz zwany SPV (*Special Purpose Vehicle*, patrz np. Vaugirard, 2003). Na konto SPV wpływają składki reasekuracyjne płacone przez ubezpieczyciela oraz opłaty ze sprzedaży obligacji. Przychody te są następnie inwestowane w celu późniejszego wykorzystania przy płatnościach dla posiadaczy obligacji, takich jak wypłaty związane z kuponami i wartością nominalną obligacji, a w przypadku zajścia triggering point – również do pokrycia strat ubezpieczyciela.

Obligacje katastroficzne są, podobnie jak klasyczne obligacje, oceniane przez firmy rankingowe, które przyznają odpowiednie oceny związane z poziomem ryzyka danej obligacji.

Oprócz obligacji katastroficznych istnieją inne instrumenty pochodne powiązane z występowaniem katastrof naturalnych. Przykładem mogą być tutaj opcje katastroficzne. Oprócz firm ubezpieczeniowych, sprzedażą tego typu instrumentów mogą być również zainteresowane samorządy (np. obligacje powodziowe dla gminy), rządy poszczególnych państw, a w przypadku kupna – również indywidualne osoby (np. obligacje pogodowe powiązane z poziomem opadów dla rolników, patrz np. Nowak i in., 2008).

3. Wycena obligacji

W pierwszej części niniejszego punktu wprowadzimy oznaczenia i przedstawimy niezbędne definicje związane z obligacjami katastroficznymi oraz ich wyceną. Zdefiniujemy procesy stochastyczne potrzebne do opisu dynamiki zmian krótkoterminowej stopy procentowej oraz zależności zagregowanej wielkości szkód katastroficznych od czasu. Rozpatrywane procesy stochastyczne będą procesami z czasem ciągłym. Ich horyzont czasowy będzie miał postać $[0,T']$ dla ustalonej wartości $T'>0$. Będziemy zakładać ponadto, że termin wygaśnięcia obligacji katastroficznej T następuje najpóźniej w momencie T', tzn., że $T \leq T'$. Założenie to pozwoli poprawnie zdefiniować pojęcie braku arbitrażu dla rodziny cen obligacji zerokuponowych (Definicja 2). W dalszej części tego punktu rozpatrywać będziemy dwie miary probabilistyczne: P i Q. Wartości oczekiwane oraz warunkowe wartości oczekiwane względem tych miar oznaczać będziemy odpowiednio symbolami: E^P i E^Q.

Niech $(W_t)_{t\in[0,T']}$ będzie ruchem Browna. W proponowanej przez nas metodzie wyceny obligacji katastroficznej ruch Browna użyty zostanie do opisu dynamiki krótkoterminowej stopy procentowej (patrz równanie (2)).

Niech $(U_i)_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i ograniczonym drugim momencie. Zakładamy, że dla dowolnego $t \in [0,T']$, zagregowana wielkość szkód katastroficznych do momentu t opisana jest złożonym procesem Poissona $\widetilde{N}_t$, danym wzorem

$$\widetilde{N}_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \quad t \in [0,T'],$$

gdzie $(N_t)_{t\in[0,T']}$ jest procesem Poissona o intensywności κ. Dla ustalonej miary probabilistycznej P, względem której proces $(N_t)_{t\in[0,T']}$ jest procesem Poissona, $N_0 = 0$ P - p.n.,

$$E^P N_t = \kappa t \text{ dla } t \in [0,T']$$

oraz

$$P(N_t - N_s = k) = e^{-\kappa(t-s)} \frac{[\kappa(t-s)]^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,... \text{ dla } 0 \le s \le t \le T'.$$

Moment skoku procesu $(N_t)_{t\in[0,T']}$ interpretujemy jako moment zajścia zjawiska katastroficznego. Wielkość szkody w każdym ustalonym momencie skoku procesu N_t (tzn. momencie t, w którym $\Delta N_t = N_t - N_{t-} = 1$) jest zmienną losową wybraną z ciągu $(U_i)_{i=1}^{\infty}$. W części symulacyjnej (punkt 4 artykułu) przyjmiemy, że zmienne losowe U_i mają rozkład Gamma. Proces $(\widetilde{N}_t)_{t\in[0,T']}$ jest niemalejącym procesem stochastycznym, którego trajektorie są prawostronnie ciągłe i mają postać schodkową.

Dla wyznaczenia analitycznej postaci formuły wyceny obligacji katastroficznej posłużymy się metodą martyngałową. Metoda ta wymaga precyzyjnego zdefiniowania przestrzeni probabilistycznej z filtracją. W przyjętym przez nas modelu filtracja $(F_t)_{t\in[0,T']}$ określona jest wzorami

$$F_t = \sigma(F_t^0 \cup F_t^1), \quad F_t^0 = \sigma(W_s, s \le t),$$
$$F_t^1 = \sigma(\widetilde{N}_s, s \le t), \quad t \in [0,T'].$$

Ponadto zakładamy, że σ - ciało F_0 jest generowane przez zbiory miary P – zero, tzn.

$$F_0 = \sigma(\{A \in F : P(A) = 0\})$$

oraz że $(W_t)_{t\in[0,T']}$, $(N_t)_{t\in[0,T']}$ i $(U_i)_{i=1}^{\infty}$ są niezależne. Przy powyższych założeniach, przestrzeń probabilistyczna z filtracją $\left(\Omega, F, (F_t)_{t\in[0,T']}, P\right)$ spełnia zwykłe warunki, tzn. σ - ciało F jest P - zupełne, filtracja $(F_t)_{t\in[0,T']}$ jest prawostronnie ciągła i σ - ciało F_0 zawiera wszystkie zbiory miary P - zero.

Niech $k_1 > 0$ będzie wielkością szkód, powyżej której następuje transfer środków finansowych (np. wypłata odpowiednich środków, zgromadzonych przez SPV, ubezpieczycielowi) z obligacji katastroficznej w momencie jej wygaśnięcia. Definiujemy moment stopu τ związany z triggering point obligacji.

$$\tau(\omega) = \inf_{t\in[0,T']} \left\{\widetilde{N}_t(\omega) > k_1\right\} \wedge T',$$

gdzie $\wedge$ jest dwuargumentowym operatorem minimum.

Przedstawimy obecnie opis poszczególnych elementów rynku finansowego, zdefiniujemy obligację katastroficzną oraz pojęcie braku arbitrażu.

Symbolem $(B_t)_{t\in[0,T']}$ oznaczamy konto bankowe spełniające równanie stochastyczne

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad B_0 = 1,$$

gdzie $r = (r_t)_{t\in[0,T']}$ jest procesem opisującym wolną od ryzyka krótkoterminową stopę procentową.

Zakładamy, że na rynku finansowym istnieje możliwość handlu obligacjami zerokuponowymi. Niech $B(t,T)$ oznacza cenę w momencie t zerokuponowej obligacji o terminie wygaśnięcia $T \le T'$ i wartości nominalnej 1. Niech $0 \le w \le 1$ będzie pewną stałą rzeczywistą, określającą procentową utratę wartości obligacji, tzn. procentową część jej wartości nominalnej, która jest tracona przez posiadacza obligacji w przypadku zajścia triggering point.

Definicja 1. Symbolem $IB_{cat}(\tau, T, Fv)$ oznaczamy obligację katastroficzną o wartości nominalnej Fv, terminie wygaśnięcia i wypłaty T, która spełnia następujące założenia.

a) Jeżeli wielkość szkód przekroczy wartość k_1 nie później niż w terminie wygaśnięcia, tzn. $\tau \le T$, posiadacz obligacji otrzymuje wypłatę równą $Fv(1-w)$.

b) Jeżeli $\tau > T$, wypłata dla posiadacza obligacji jest równa wartości nominalnej Fv.

Dla obligacji katastroficznej $IB_{cat}(\tau,T,Fv)$ funkcja wypłaty $v_{IB_{cat}(\tau,T,Fv)}$ dana jest formułą

$$v_{IB_{cat}(\tau,T,Fv)} = FvI_{\{\tau>T\}} + (1-w)FvI_{\{\tau\le T\}} = Fv\left(1-wI_{\{\tau\le T\}}\right).$$

W naszych dalszych rozważaniach zakładać będziemy, że rynek finansowy pozbawiony jest możliwości arbitrażu. Pojęcie braku arbitrażu dla rodziny cen obligacji zerokuponowych w sposób ścisły opisuje poniższa definicja.

Definicja 2. $B(t,T)$, $t \le T \le T'$ nazywamy wolną od arbitrażu rodziną cen obligacji zerokuponowych względem stopy zwrotu r, jeżeli spełnione są następujące warunki:

a) $B(T,T)=1$ dla każdego $T \in [0,T']$.

b) Istnieje miara probabilistyczna Q, równoważna P taka, że proces zdyskontowanej ceny obligacji zero-kuponowej

$$B(t,T)/B_t, \ \ t \in [0,T],$$

jest martyngałem względem Q.

Jeżeli spełnione są warunki Definicji 2, formuła wyceny przyjmuje postać

$$B(t,T) = E^Q\left(e^{-\int_t^T r_u du} \mid F_t^Q\right), \ \ t \in [0,T].$$

W Definicji 2 równoważność P i Q oznacza, że te same zbiory należące do F są dla obu miar probabilistycznych zbiorami miary 0.

Niech $\lambda_u = \lambda$ będzie ustaloną stałą, związaną z rynkową ceną ryzyka dla obligacji zerokuponowych. Następująca pochodna Radona – Nikodyma definiuje miarę probabilistyczną Q równoważną P, taką że $B(t,T)/B_t$, $t \in [0,T]$, jest martyngałem względem Q:

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\int_0^T \lambda_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda_u^2 du\right) \ \ P-p.n. \tag{1}$$

Dla uzyskania formuły wyceny obligacji katastroficznej $IB_{cat}(\tau,T,Fv)$ przy założeniu braku arbitrażu, niezbędny jest opis dynamiki wolnej od ryzyka krótkoterminowej stopy procentowej $r = (r_t)_{t \in [0,T']}$. Symbolem $f^M(t,T)$ oznaczamy wartość w momencie t chwilowej rynkowej stopy forward o terminie zapadalności T. W szczególności, $f^M(0,T)$ jest związana z początkową strukturą terminową $P^M(0,T)$ poprzez formułę

$$f^M(0,T) = -\frac{\partial \ln P^M(0,T)}{\partial T}.$$

Przyjmujemy model Hulla – White'a (uogólniony model Vasicka) krótkoterminowej stopy procentowej. Dynamikę r opisuje równanie stochastyczne

$$dr(t) = (\vartheta(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t \tag{2}$$

dla dodatnich stałych a i σ oraz dopasowanej do struktury terminowej funkcji ϑ postaci

$$\vartheta(t) = \frac{\partial f^M(0,t)}{\partial t} + af^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) - \lambda\sigma.$$

Poza niewątpliwą zaletą, którą jest możliwość dopasowania funkcji ϑ do początkowej struktury terminowej, model Hulla – White'a o dynamice stopy procentowej opisanej równaniem (2) charakteryzuje się w praktyce finansowej stosunkowo niewielkim prawdopodobieństwem ujemnej stopy procentowej w ustalonym momencie t (patrz np. Brigo i Mercurio, 2006).

W dalszej części tego punktu artykułu będziemy zakładać neutralny stosunek rynków finansowych do ryzyka katastroficznego.

Zastosujemy metodologię opisaną w Vaugirard (2003) oraz Nowak i Romaniuk (2009) do wyceny obligacji katastroficznej. Dla skrócenia zapisu formuły wyceny wprowadzamy dystrybuantę Φ momentu stopu τ. Można udowodnić, że

$$\Phi(T) = P(\widetilde{N}_T > k_1).$$

Twierdzenie 1. Niech $IB(t)$ będzie ceną $IB_{cat}(\tau, T, Fv)$ w momencie t. Wówczas

$$IB(t) = A(t,T)Fve^{-B(t,T)r_t}\left[1 - wE^Q\left(I_{\{\tau \le T\}} \mid F_t\right)\right], \tag{3}$$

gdzie

$$B(t,T) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)$$

i

$$A(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)}\exp\left(B(t,T)f^M(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a}\left(1 - e^{-2at}\right)B(t,T)^2\right).$$

W szczególności, cena obligacji $IB_{cat}(\tau, T, Fv)$ w chwili początkowej 0 przyjmuje postać

$$IB(0) = P^M(0,T)\exp\left(B(0,T)f^M(0,0)\right)Fve^{-B(0,T)r_0}(1 - w\Phi(T)).$$

Szkic dowodu.

Po zmianie wyjściowej miary probabilistycznej P na równoważną miarę martyngałową Q przy zastosowaniu pochodnej Radona – Nikodyma (1), równanie (2) przyjmuje postać

$$dr(t) = (\vartheta(t) + \lambda\sigma - ar_t)dt + \sigma dW_t.$$

Z formuły wyceny obligacji zerokuponowej w modelu Hulla – White'a (patrz Brigo i Mercurio, 2006) wynika, że

$$E^Q\left(\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \mid F_t\right) = A(t,T)Fve^{-B(t,T)r_t}.$$

Ponieważ $\exp\left(-\int_t^T r_u du\right)$ **i** $v_{IB_{cat}(\tau,T,Fv)}$ **są niezależne względem** Q,

$$IB(t) = E^Q\left(\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \mid F_t\right) E^Q\left(v_{IB_{cat}(\tau,T,Fv)} \mid F_t\right).$$

Z niezależności $v_{IB_{cat}(\tau,T,Fv)}$ **i** W, **dla** $t = 0$,

$$E^Q v_{IB_{cat}(\tau,T,Fv)} = E^P v_{IB_{cat}(\tau,T,Fv)} \frac{dQ}{dP} = E^P v_{IB_{cat}(\tau,T,Fv)} E^P\left(\frac{dQ}{dP}\right)$$
$$= E^P v_{IB_{cat}(\tau,T,Fv)} = Fv(1 - w\Phi(T)).$$

Funkcja $P^M(0,T)$ opisuje zależność ceny rynkowej w chwili 0 obligacji zerokuponowej od terminu wygaśnięcia T. Zazwyczaj dysponujemy niewielką liczbą danych dotyczących obligacji zerokuponowych o różnych terminach wygaśnięcia.

Dla uzyskania konkretnej postaci formuły (3) potrzebny jest analityczny opis funkcji $P^M(0,T)$. Możemy uzyskać go metodą dopasowania punktów do krzywej, biorąc przy tym pod uwagę, że $P^M(0,0)=1$. Najprostszą postacią tak uzyskanej funkcji jest postać liniowa. Zależność tego typu można zaobserwować na rynkach finansowych. Następujący lemat przedstawia formułę wyceny obligacji katastroficznej $IB_{cat}(\tau,T,Fv)$ dla funkcji $P^M(0,T)=1-\alpha T$.

Lemat 1. Jeżeli $P^M(0,T)=1-\alpha T$ dla pewnej stałej $\alpha>0$,

$$IB(t)=A(t,T)Fve^{-B(t,T)r_t}\left[1-wE^Q\left(I_{\{\tau\le T\}}\mid F_t\right)\right],$$

gdzie

$$B(t,T)=\frac{1}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)$$

i

$$A(t,T)=\frac{1-\alpha T}{1-\alpha t}\exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha t}B(t,T)-\frac{\sigma^2}{4a}\left(1-e^{-2at}\right)B(t,T)^2\right).$$

W szczególności

$$IB(0)=(1-\alpha T)Fve^{\frac{\alpha-r_0}{a}\left(1-e^{-aT}\right)}(1-w\Phi(T)). \tag{4}$$

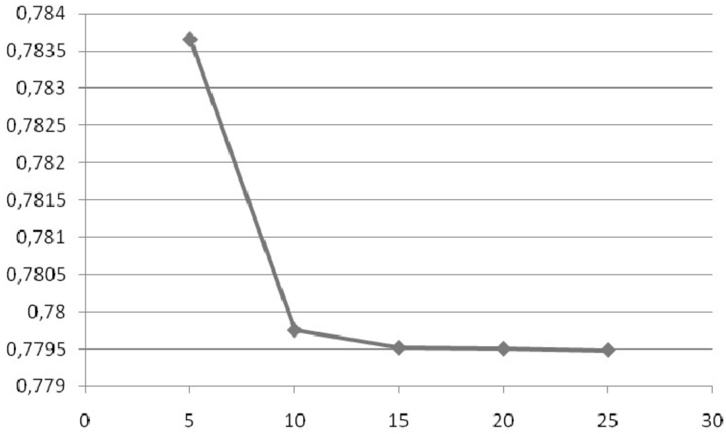
4. Symulacje Monte Carlo

W celu analizy zachowania się ceny obligacji katastroficznej wynikającej ze wzoru (4), przeprowadzono szereg symulacji Monte Carlo. Za każdym razem pryeprowadyono n=1 000 000 symulacji.

Jako swoisty „punkt odniesienia" w badaniach przyjęto stopę procentową opisaną parametrami a = 0,025, α = 0,01, r_0 = 0,05. Proces strat był określony procesem Poissona o intensywności κ = 0,01. Wartość pojedynczej straty była zdefiniowana rozkładem Gamma. Jako podstawowy zestaw parametrów przyjęto przy tym parametr kształtu (α_G) równy 5 i parametr skali (β_G) o wartości 10. Należy zauważyć, że wartość oczekiwana w rozkładzie Gamma (czyli wartość oczekiwana pojedynczej straty w naszym przypadku) jest równa $\alpha_G\ \beta_G$, zaś wariancja jest równa $\alpha_G\ \beta_G^2$. Oznacza to, że rozważamy szkody o charakterze katastroficznym, czyli rzadko występujące (mała wartość oczekiwana procesu Poissona w jednostce czasu), o potencjalnie wysokich wartościach i dużej zmienności wartości (duża wartość oczekiwana i wariancja).

Na początku wyznaczono cenę obligacji katastroficznej o wartości nominalnej (*Fv*) równej 1, triggering point (k_1) o wielkości 50 i utracie wartości obligacji (*w*) równej 0,2. Cena wynosiła w takim przypadku 0,783662.

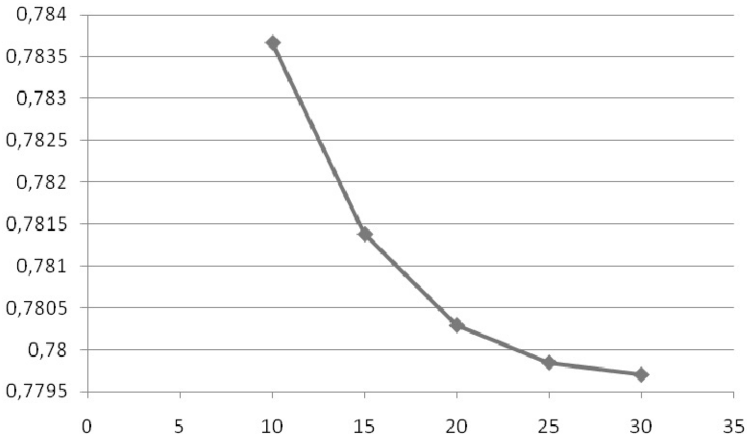
Następnie przebadano zależność ceny obligacji od zmiennej wartości parametru kształtu rozkładu Gamma przy stałym parametrze skali $\beta_G = 10$. Rosła zatem jednocześnie wartość oczekiwana i wariancja strat. Wyniki zostały zaprezentowane na Rys. 1.



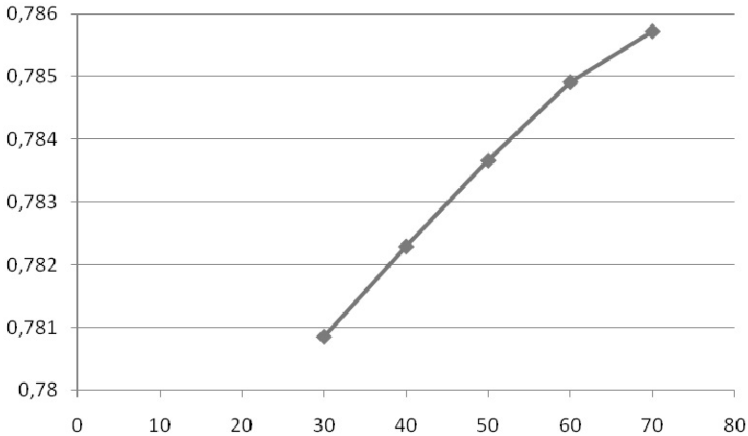
Rysunek 1. Zależność ceny obligacji od wartości parametru kształtu

W kolejnym kroku zbadano zależność ceny obligacji od zmiennej wartości parametru skali rozkładu Gamma przy stałym parametrze kształtu $\alpha_G = 5$. W tym przypadku rosły zarówno wartość oczekiwana, jak i wariancja strat, ale wariancja rosła w szybszym tempie, niż w rozważanym poprzednio zagadnieniu. Wyniki zaprezentowano na Rys. 2. Jak widzimy, w obydwu przypadkach, zależność pomiędzy ceną a parametrem ma charakter nieliniowy i wraz ze wzrostem wartości parametrów następuje dość istotny spadek ceny obligacji katastroficznej mierzony jednostką pieniężną (wartość nominalna rozważanej obligacji katastroficznej wynosi 1). Postać rysunków sugeruje krzywoliniowość zależności wraz z malejącym nachyleniem krzywej, ale wnioski te wymagają dalszych szczegółowych badań.

Kolejna analiza dotyczyła wpływu wartości triggering point na cenę obligacji przy ustalonych pozostałych parametrach. Wyniki przedstawiono na Rys. 3. Jak widzimy, wraz ze wzrostem poziomu triggering point następuje stosunkowo niewielki wzrost ceny obligacji, niemal bliski liniowemu.

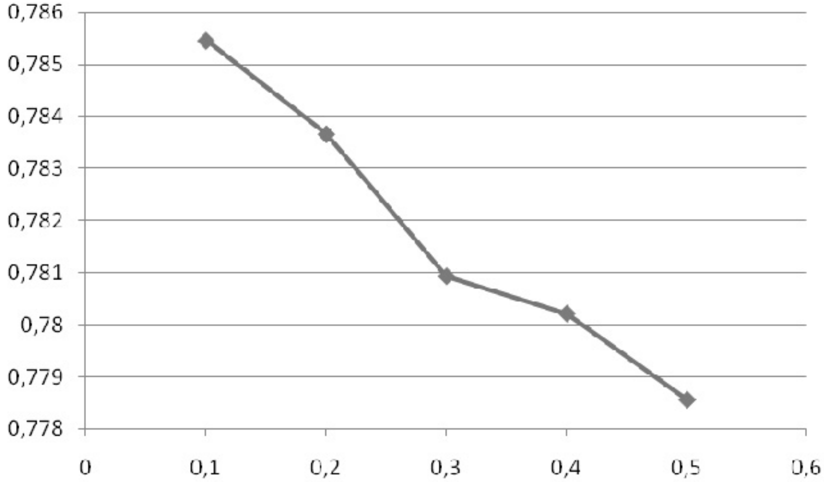


Rysunek 2. Zależność ceny obligacji od wartości parametru skali



Rysunek 3. Zależność ceny obligacji od poziomu triggering point

W kolejnym eksperymencie przebadano zależność ceny obligacji od zmian utraty wartości obligacji. Wyniki przedstawiono na Rys. 4. Jak widzimy, następuje spadek ceny obligacji wraz ze wzrostem utraty wartości obligacji, o charakterze zbliżonym do liniowego w badanym zakresie parametrów.



Rysunek 4. Zależność ceny obligacji od utraty wartości obligacji

5. Podsumowanie

Występowanie coraz częstszych katastrof naturalnych, takich jak huragany, trzęsienia ziemi czy powodzie, skutkuje wieloma negatywnymi konsekwencjami, w tym zwiększającymi się stratami finansowymi i materialnymi ubezpieczycieli, rządów i samorządów. Klasyczne mechanizmy ubezpieczeniowe, ze względu na sposób doboru ryzyk, nie są dobrze przystosowane do szkód wynikających z występowania dużych katastrof naturalnych. Katastrofy naturalne powodują szkody rzadko występujące, o dużych wartościach, zależne geograficznie i czasowo. Przydatne może być zatem wykorzystanie równocześnie innych instrumentów finansowych i ubezpieczeniowych w postaci jednego, zintegrowanego portfela konstruowanego przez ubezpieczyciela lub np. samorząd. Jednym z takich instrumentów mogą być obligacje katastroficzne W niniejszym artykule analizujemy pewien przykład obligacji katastroficznej. Zaprezentowana została metodologia wyceny opisywanego typu obligacji katastroficznej przy uogólnionym modelu Vasicka stopy procentowej oraz przeanalizowano jej wybrane właściwości z wykorzystaniem symulacji metodami Monte Carlo.

Przykład obligacji katastroficznej, przedstawionej w pracy, może być wykorzystany jako jeden z elementów hierarchicznego portfela instrumentów finansowych i ubezpieczeniowych o określonych progach wielkości strat, powodujących wykorzystanie kolejnych typów instrumentów z takiego portfela (patrz np. Nowak i Romaniuk, 2009). Istnieje też możliwość zastosowania przedstawionej w pracy metody wyceny do obligacji katastroficznych o bardziej złożonej postaci funkcji wypłaty.

Literatura

Brigo D., Mercurio F. (2006) *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit.* Springer, Berlin, London

Borch K. (1974) *The Mathematical Theory of Insurance.* Lexington Books, Lexington

Cox S., H., Fairchild J., R., Pedersen H., (2000) Economic Aspects of Securitization of Risk. *ASTIN Bulletin*, **30**, 1, 157-192

Cummins J.D., Doherty N., Lo A. (2002) Can insurers pay for the "big one"? Measuring the capacity of insurance market to respond to catastrophic losses. *Journal of Banking and Finance*, **26** 557-583

Ermoliev Yu. M., Ermolyeva T.Yu., McDonald G., Norkin V.I. (2001) Problems on Insurance of Catastrophic Risks. *Cybernetics and Systems Analysis*, **37**, 2, 220-234

Ermolieva T., Romaniuk M., Fischer G., Makowski M. (2007) Integrated model-based decision support for management of weather-related agricultural losses. W: Hryniewicz O., Studzinski J., Romaniuk M., red., *Enviromental informatics and systems research. Vol. 1: Plenary and session papers - EnviroInfo 2007*, 389-398, Shaker Verlag

George J. B. (1999) Alternative reinsurance: Using catastrophe bonds and insurance derivatives as a mechanism for increasing capacity in the insurance markets. *CPCU Journal*

Muermann A. (2008) Market Price of Insurance Risk Implied by Catastrophe Derivatives. *North American Actuarial Journal*, **12**, 3, 221-227

Nowak P., Romaniuk M., Ermolieva T. (2008) Integrated management of weather - related agricultural losses - computational approach. W: Wilimowska E., Borzemski L., Grzech A., Świątek, J., red., *Information Systems Architecture and Technology. Models of the Organisation's Risk Management*, 207-217, Wrocław

Nowak P., Romaniuk M. (2009) Portfolio of financial and insurance instruments for losses caused by natural catastrophes. W: Wilimowska Z., Borzemski L., Grzech A., Świątek J., red., *Information Systems Architecture and Technology. IT Technologies in Knowledge Oriented Management Process*, 27-36, Wrocław

Romaniuk M., Ermolieva T. (2005) Application of EDGE software and simulations for integrated catastrophe management. *International Journal of Knowledge and Systems Sciences*, **2**, 2, 1-9

Vaugirard V.E. (2003) Pricing catastrophe bonds by an arbitrage approach. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, **43**, 119-132