

## CZYNNIKOWY MODEL ZARZĄDZANIA PORTFELEM OBLIGACJI

**Andrzej Jakubowski**

Instytut Badań Systemowych PAN, ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa  
*ajakibs@ibspan.waw.pl*

W pracy przedstawiono zagadnienie zarządzania portfelem obligacji w warunkach ryzyka nieoczekiwanych zmian poziomu stóp procentowych oraz ryzyka zmian kształtu krzywej dochodowości, będącej ilustracją graficzną struktury terminowej rynkowych stóp procentowych *spot*. Podano opis matematyczny tzw. analizy czynnikowej dynamiki zmian struktury terminowej, przedstawiono definicje czynnikowego parametru *duration* oraz czynnikowej wypukłości obligacji, po czym zaprezentowano czynnikowy model immunizacji i optymalizacji rozpatrywanego portfela. Szczególną uwagę zwrócono na możliwość identyfikacji trzech nieskorelowanych czynników wspólnych: czynnika poziomu, czynnika nachylenia oraz czynnika krzywizny. Czynniki te odzwierciedlają łącznie zmianę kształtu analizowanej krzywej dochodowości, podlegającej losowym fluktuacjom z upływem czasu bieżącego. Model umożliwia wybór tych czynników, które mają podlegać immunizacji oraz tych czynników, ze względu na które rozpatrywany portfel obligacji będzie zarządzany aktywnie.

Słowa kluczowe: analiza czynnikowa, struktura terminowa, ryzyko stopy procentowej, portfel obligacji, immunizacja i optymalizacja.

### 1. Wprowadzenie \*

Przedmiotem prowadzonych rozważań jest wykorzystanie zaawansowanych metod analizy stochastycznej do wyprowadzenia modelu czynnikowej immunizacji i optymalizacji portfela obligacji. Za punkt wyjściowy do dalszych rozważań przyjęto tzw. analizę czynnikową nieoczekiwanych zmian struktury terminowej rynkowych stóp procentowych *spot*, a następnie - sformułowano model dynamiki zmian zidentyfikowanych czynników wspólnych oddziałujących na tę strukturę, określony w postaci wektorowego stochastycznego równania różniczkowego. Wykorzystano w tym celu Lemat *Itô* oraz wnioski z niego wypływający. W rezultacie uzyskano - po przekształceniach - model czynnikowy o postaci końcowej pokrywającej się ze

---

\* Skrócona wersja niniejszej pracy była prezentowana na konferencji naukowej "Modelowanie preferencji a ryzyko '2011", Ustroń, 3-5 kwietnia, 2011 r.; tytuł referatu: *Immunizacja i optymalizacja portfela obligacji – model czynnikowy*, Studia Ekonomiczne UE w Katowicach, Zeszyt 96, 2011, s. 29-55.

znany z literatury przedmiotu modelem, którego wyprowadzenie nie było (jak dotąd) publikowane. Dowiedziono również, że znany dotychczas model Fishera-Weila kwantyfikacji ryzyka stóp procentowych na rynku obligacji - jest szczególnym przypadkiem analizowanego w pracy modelu czynnиковego.

Rozważane w pracy podejście jest kontynuacją wcześniejszych badań prowadzonych w USA (Garbade, 1986, 1989; Litterman, Scheinkman, 1991) i w Danii (Dahl, 1993). W szczególności, dotyczy to merytorycznego uzasadnienia zasadniczych koncepcji oraz formalnego wyprowadzenia podstawowych wzorów prezentowanych (bez dowodów) w tych pracach. A przede wszystkim, interpretacji tych zależności na gruncie metodologii nowoczesnej analizy stochastycznej. W tym też sensie, prezentowane w pracy wyniki są – zdaniem autora – oryginalne.

Analizowany model immunizacji i optymalizacji portfela obligacji można zaliczyć do klasy modeli semi-aktywnych. Uzasadnienie tego faktu jest następujące. Ogólnie rzecz biorąc, pod pojęciem immunizacji portfela obligacji rozumiemy takie zaprojektowanie udziałów wartościowych poszczególnych obligacji (o różnych terminach wykupu) wchodzących w skład analizowanego portfela, aby wartość globalna tego portfela była jak najmniej wrażliwa na nieoczekiwane zmiany rynkowych stóp procentowych. Zagadnienie to rozpatruje się przy zadanym horyzoncie inwestycyjnym wynikającym z terminu płatności przyszłych zobowiązań finansowych. W najprostszych modelach immunizacyjnych zakłada się, że w przyszłości występować będzie pojedyncze zobowiązanie. Natomiast w modelach bardziej złożonych, podstawowym problemem jest dopasowanie wartości bieżącej strumienia przyszłych dochodów wynikających z faktu posiadania określonego portfela obligacji (płatności odsetkowe i wartości nominalne) do wartości bieżącej strumienia przyszłych zobowiązań, rozpatrywanych w dyskretnych punktach czasowych.

Zadanie immunizacji nie ma na ogół jednoznacznego rozwiązania - istnieje wiele (lub nieskończenie wiele) portfeli umożliwiających dopasowanie przyszłych dochodów do przyszłych zobowiązań. Umożliwia to dodatkowo sformułowanie pewnej funkcji celu - np. maksymalizacja zysku lub minimalizacja kosztu utworzenia określonego portfela obligacji. Problematyka immunizacji sprowadza się w rozpatrywanym przypadku do zagadnienia optymalizacji, rozwiązywanego za pomocą jednej z wielu technik programowania matematycznego. W zagadnieniu tym problem immunizacji portfela formułuje się w postaci określonego zbioru ograniczeń.

## 2. Struktura terminowa stóp procentowych – zagadnienie wyceny obligacji

Zagadnienie immunizacji portfela obligacji wiąże się ściśle z pojęciem struktury terminowej stóp procentowych. Struktura ta odzwierciedla funkcyjną zależność wysokości poszczególnych stóp procentowych od terminów zapadalności zobowiązań, dla których te stopy się rozpatruje. W analizowanym przypadku przyjmuje się, że rynkowe stopy procentowe  $spot\ r_{0t}$  dla poszczególnych terminów  $t = 1, 2, 3, \dots, T$ , są określone przez rentowności do wykupu  $YTM$  (yield to maturity) obligacji czysto-dyskontowych. Rentowności te stanowią pewien "wzorzec", według którego dokonuje się wyceny wszystkich innych funkcjonujących w danym sektorze rynku finansowego obligacji wielokuponowych, jak też i innych instrumentów finansowych.

Oznaczając:  $TS(\tau)$  - struktura terminowa w chwili bieżącej  $\tau$ , mamy

$$TS(\tau) = [r_{01}(\tau), \dots, r_{0t}(\tau), \dots, r_{0T}(\tau)]. \quad (1)$$

Graficznym zobrazowaniem struktury terminowej stóp procentowych *spot* jest tzw. krzywa dochodowości. Krzywa ta, przedstawiająca zależność rentowności do wykupu  $YTM = r_{0t}$  obligacji czysto-dyskontowych od terminów wykupu tych obligacji  $t = 1, \dots, T$ , może mieć różny kształt. Może to być krzywa rosnąca, malejąca, w przybliżeniu płaska lub łukowata (*hump-shaped*). Kształt krzywej dochodowości zależy od szeregu czynników związanych z funkcjonowaniem analizowanego rynku finansowego, bieżącej sytuacji gospodarczej danego kraju, jak również sektora rynku, dla którego krzywa ta jest identyfikowana (rynek obligacji i bonów skarbowych, rynek obligacji komunalnych, korporacyjnych, itp.). Ponadto, kształt tej krzywej zmienia się w czasie – co jest właśnie źródłem ryzyka stóp procentowych.

Na Rys. 1 przedstawiono przebiegi krzywych dochodowości skarbowych papierów dłużnych, ilustrujące stochastyczną dynamikę zmian struktury terminowej stóp procentowych *spot* dla rynku USA na przestrzeni ok. 25 lat; charakterystyki te zdejmovano w odstępach comiesięcznych od stycznia 1955 do grudnia 1979. Każdorazowo, rozpatrywano poziom stóp procentowych  $r_{0t}$  o terminach zapadalności – od 1 roku do 10 lat.

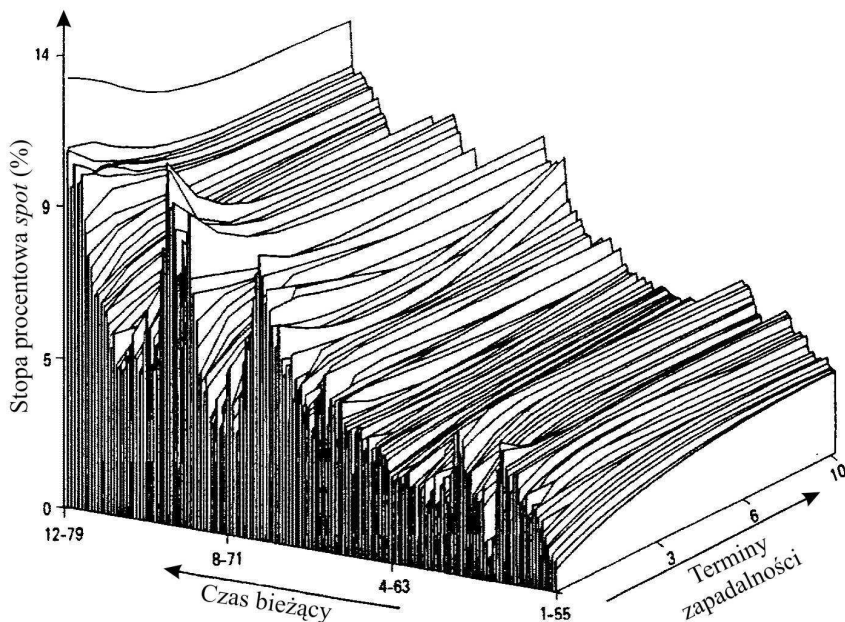
Analizując prezentowane wykresy, warto zwrócić uwagę na następujące fakty:

(i) Rozpatrywane krzywe dochodowości na ogół nie są płaskie – o ile rozpatrujemy cały zakres zmienności terminów zapadalności.

(ii) Można zauważyć ściśle dodatnią korelację pomiędzy zmiennością krótkoterminowych stóp procentowych *spot* – a zmiennością stóp długoterminowych; a więc wzrost stóp krótkoterminowych powoduje (na ogół) wzrost stóp długoterminowych i odwrotnie.

(iii) Dynamika zmian (a więc i wariancja) stóp krótkoterminowych jest znacznie większa w porównaniu z przypadkiem stóp długoterminowych. Można tu więc mówić o występowaniu pewnego współczynnika "tłumienia" zakresu zmienności stóp  $r_{0t}$ , niwelującego wahania tych stóp – w miarę, jak przesuujemy się w kierunku stóp długoterminowych. Zjawisko dużej zmienności stóp krótkoterminowych tłumaczymy silnym wpływem na te stopy określonych – zmiennych w czasie – decyzji banku centralnego (lub w Polsce - Rady Polityki Pieniężnej) co do poziomu stóp *reverse-repo*. Natomiast tłumienie tej zmienności, jakie występuje w odniesieniu do stóp długoterminowych – wyjaśniane jest na gruncie tzw. teorii segmentacji rynku.

(iv) Analizowane przebiegi krzywych dochodowości są regularnymi przebiegami gładkimi; a więc funkcje aproksymujące te przebiegi nie wykazują żadnych "pofalowań" czy też uskoków. Tłumaczone jest to z jednej strony – działalnością na analizowanych rynkach arbitrażystów, spekulujących na wartościach stopy procentowej; a z drugiej strony – funkcjonowaniem na danym rynku tzw. teorii oczekiwań (Haugen, 1996).



Rys. 1. Ilustracja zmienności struktury terminowej dla rynku w USA; okres: I 1955–XII 1979 (dane comiesięczne). Źródło: Haugen (1996).

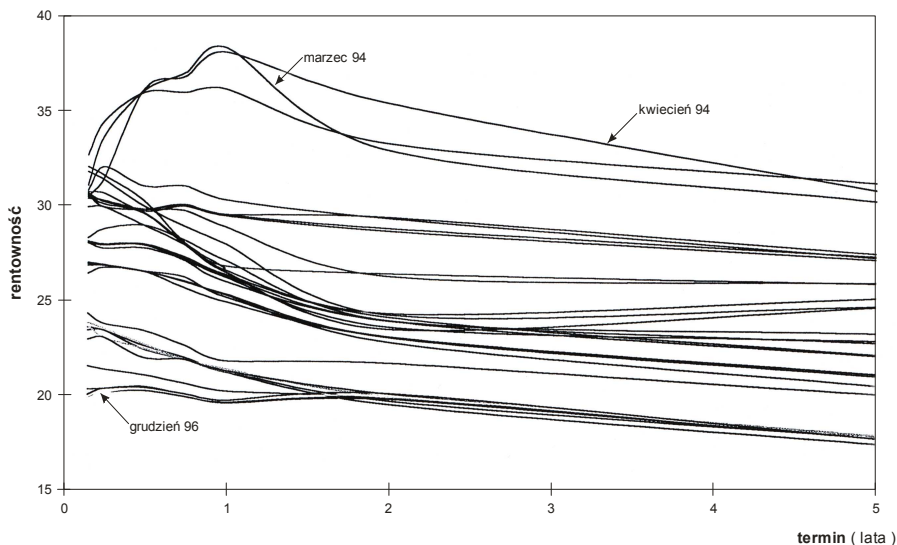
Na Rys. 2 przedstawiono - dla porównania - wykres dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych, charakteryzującej rynek finansowy w Polsce w okresie III 1994 – XII 1996. Prezentowane przebiegi 34. krzywych dochodowości uzyskano na podstawie rentowności do wykupu (YTM) bonów skarbowych 13-52 tygodniowych oraz 2- i 5-letnich obligacji skarbowych o stałym oprocentowaniu.

Jak wspomniano, krzywa dochodowości stanowi pewien wzorzec stóp procentowych  $spot\ r_{0t}$  ( $t = 1, \dots, T$ ), za pomocą którego można dokonywać wyceny różnych papierów wartościowych. Wyceny tej dokonuje się poprzez dyskontowanie w czasie (do chwili bieżącej) przyszłych wpływów pieniężnych związanych z rozpatrywanym instrumentem finansowym. W szczególności, każdą obligację o stałym oprocentowaniu, związaną z wypłatami w kolejnych latach  $t = 1, 2, \dots, (T - 1)$  odsetek  $C$  oraz w roku  $T$  - odsetek  $C$  plus wartość nominalna  $N$  - możemy rozpatrywać jako sumę obligacji czysto-dyskontowych. A zatem, wartość bieżąca  $P$  takiej obligacji jest równa

$$P = \frac{C}{1+r_{01}} + \frac{C}{(1+r_{02})^2} + \dots + \frac{C}{(1+r_{0T})^T} + \frac{N}{(1+r_{0T})^T}. \quad (2)$$

Wartość tę nazywa się również często wartością wewnętrzną obligacji (*intrinsic value*). Natomiast sam wzór (2) jest nazywany wzorem wyceny obligacji.

Struktura terminowa stóp procentowych



Rys. 2. Ilustracja zmienności struktury procentowej dla rynku w Polsce; okres: III 1994 – XII 1996 (dane comiesięczne).  
Źródło: Kulikowski, Bury, Jakubowski (1996).

Określenie struktury terminowej stóp procentowych przez rentowności do wykupu  $r_{01}, r_{02}, \dots, r_{0T}$  obligacji czysto-dyskontowych ma zasadnicze znaczenie nie tylko ze względu na wycenę wartości obligacji. Znając przebieg rozpatrywanej krzywej dochodowości, a także dynamikę zmian tego przebiegu z upływem czasu bieżącego, potrafimy oszacować wpływ zmian rynkowych stóp procentowych na wartość rozpatrywanych obligacji, a tym samym na stopę zwrotu z dokonywanych inwestycji.

Ze wzoru wyceny (2) wynika bowiem bezpośrednio, że nieoczekiwany wzrost rynkowych stóp procentowych *spot*  $r_{0t}$   $t = 1, \dots, T$ , a więc przesunięcie się krzywej dochodowości w górę – powoduje spadek wartości bieżącej  $P$  obligacji. Natomiast spadek tych stóp procentowych, a więc ruch krzywej dochodowości w dół, powoduje wzrost wartości bieżącej  $P$ . Istotne są również wszelkiego rodzaju niespodziewane zmiany kształtu struktury terminowej stóp procentowych, prowadzące do zmiany nachylenia krzywej dochodowości, pojawiania się różnego rodzaju garbów, itp. Mówi się w tym przypadku o tzw. ryzyku kształtu analizowanej krzywej (*shape risk*).

Na zakończenie tych uwag należy podkreślić, że o ile znajomość i umiejętność analizy losowej dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych jest

niezmiernie istotna w przypadku wszelkiego rodzaju inwestycji na rynku finansowym, o tyle na rynku obligacji – jest to sprawa o zasadniczym znaczeniu. Wynika to wprost ze wzoru wyceny (2).

### 3. Kwantyfikacja ryzyka stopy procentowej – parametr "duration" obligacji

Z przeprowadzonych w poprzednim punkcie rozważań wynika, że wartość bieżąca (a więc i skorelowana z nią cena rynkowa) obligacji może podlegać ciągłym oraz nieoczekiwanym fluktuacjom - ze względu na zmiany obowiązujących w danym momencie rynkowych stóp procentowych, za pomocą których dyskontujemy w czasie do chwili bieżącej wszystkie przyszłe wpływy pieniężne związane z posiadaniem obligacji. Często trudne do przewidzenia zmiany rynkowych stóp procentowych oraz wynikające stąd zmiany ceny obligacji (czy też szerzej - instrumentów finansowych) są źródłem ryzyka stóp procentowych. Ryzyko to wyraża się tzw. nieoczekiwaną stopą zwrotu z inwestycji (*unanticipated return*), Elton, Gruber (2003). W związku z tym istotna jest - z punktu widzenia zarówno inwestora jak i emitenta - wrażliwość (lub też przeciwnie - odporność) wartości rozpatrywanej obligacji na zmiany rynkowych stóp procentowych. Parametrami umożliwiającymi pomiar takiej wrażliwości jest tzw. średni czas trwania<sup>†</sup> (*duration*) oraz wypukłość (*convexity*) obligacji.

W klasycznych modelach zarządzania portfelem obligacji, w celu sformułowania parametrów *duration* i wypukłości przyjmuje się szereg upraszczających założeń zarówno co do kształtu, jak i dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych; por. Elton, Gruber (2003). Na przykład, klasyczne definicje Macaulaya parametru *duration* i wypukłości obligacji związane są z przyjęciem silnie ograniczającego założenia, że wszystkie rynkowe stopy procentowe *spot*  $r_{0t}$  – jak również ich przyrosty  $dr_{0t}$  - są sobie równe, niezależnie od terminów zapadalności zobowiązań, tj.

$$r_{0t} = r \quad \text{oraz} \quad dr_{0t} = dr, \quad \forall t = 1, \dots, T. \quad (3)$$

Oznacza to, że struktura terminowa stóp procentowych wyrażona krzywą dochodowości obligacji czysto-dyskontowych jest "płaska", przy czym zachodzi to dla dowolnej chwili bieżącej  $\tau = 1, 2, 3, \dots$ . Z powyższego założenia wynika bezpośrednio, że jeżeli chodzi o zmiany rynkowej stopy procentowej  $r$  (w tym przypadku już tylko jednej) - to możliwe są jedynie równoległe przesunięcia w górę lub w dół rozpatrywanej krzywej dochodowości o wartość  $dr$ .

Natomiast stosując prezentowane w dalszej części tego punktu podejście Fishera, Weila (1971) zakładamy, że krzywa dochodowości, będąca reprezentacją

<sup>†</sup> Dla określenia parametru *duration* obligacji będziemy konsekwentnie stosowali nazwę w języku angielskim. W literaturze polskiej parametr ten bywa również nazywany "średnim czasem trwania" obligacji. Przy częstym stosowaniu tego terminu jest to jednak bardzo niewygodne.

Z kolei stosowanie skrótu "czas trwania" obligacji jest mylące; mamy bowiem również: "termin do wykupu", czyli *time to maturity*. Natomiast, stosowany też termin "duracja" – jest zdaniem autora nie do zaakceptowania.

graficzną struktury terminowej  $TS$  stóp procentowych – może mieć dowolny kształt. Natomiast ograniczającym (i to w znacznym stopniu) założeniem jest przyjęcie, że w dalszym ciągu możliwe są wyłącznie równoległe przesunięcia tej krzywej, tj.

$$r_1 \neq \dots \neq r_t \neq \dots \neq r_T \quad \text{oraz} \quad dr_t = dr, \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad (4)$$

gdzie przez  $r_t$  oznaczono (dla uproszczenia zapisu) stopy procentowe *spot*  $r_{0t}$ .

Dla analizowanego rynku zakładamy również, że obowiązuje ciągła kapitalizacja odsetek. Wzór (2) określający wartość bieżącą obligacji przybiera wówczas postać:

$$P = P(\mathbf{r}) = P(r_1, \dots, r_t, \dots, r_T) = \sum_{t=1}^T C_t \exp(-r_t t), \quad (5)$$

gdzie  $C_t = C$  dla  $t = 1, \dots, T-1$  oraz  $C_T = C + N$ .

Można łatwo zauważyć, że w rozpatrywanym przypadku, tzw. czynnik dyskontujący  $(1+r)^{-t}$  został – dla ciągłej kapitalizacji odsetek – zastąpiony czynnikiem dyskontującym  $\exp(-r_t t)$ .

Dokonując oszacowania przyrostu  $dP$  funkcji (5) za pomocą dwóch pierwszych członów szeregu Taylora, mamy<sup>‡</sup>

$$\begin{aligned} dP = P(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - P(\mathbf{r}) &= \sum_{t=1}^T \frac{\partial P}{\partial r_t} dr_t + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 P}{\partial r_t^2} (dr_t)^2 = \\ &= - \sum_{t=1}^T (t C_t e^{-r_t t}) dr_t + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (t^2 C_t e^{-r_t t}) (dr_t)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Dzieląc obie strony powyższego wzoru przez  $P$  oraz biorąc pod uwagę założenie (4), tj.  $dr_t = dr$  ( $t = 1, \dots, T$ ), otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = - \left( \sum_{t=1}^T t C_t e^{-r_t t} / P \right) dr + \frac{1}{2} \left( \sum_{t=1}^T t^2 C_t e^{-r_t t} / P \right) (dr)^2. \quad (7)$$

Wyrażenie w nawiasie okrągłym pierwszego członu powyższej zależności definiujemy jako *duration* Fishera-Weila  $D_{FW}$  obligacji; natomiast wyrażenie w nawiasie okrągłym drugiego członu pomnożone przez  $1/2$  określa wypukłość  $V_{FW}$ .

---

<sup>‡</sup> Należy podkreślić, że ze względu na wypukłość funkcji  $P(\mathbf{r})$  przybliżenie zmiany  $dP = P(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - P(\mathbf{r})$  tej funkcji za pomocą dwóch pierwszych członów rozwinięcia Taylora jest w praktyce wystarczająco dokładne. Tak więc błąd tego przybliżenia, determinowany resztą Lagrange'a jest znikomy.

Definiując dodatkowo współczynnik wagowy

$$x_t \triangleq C_t e^{-r_t t} / P, \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad \text{mamy zatem}$$

$$D_{FW} \triangleq \sum_{t=1}^T t C_t e^{-r_t t} / P = \sum_{t=1}^T x_t t, \quad V_{FW} \triangleq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T t^2 C_t e^{-r_t t} / P = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T x_t t^2. \quad (8)$$

Ponadto, z (7) i (8) mamy następujący wzór na oszacowanie nieoczekiwanej stopy zwrotu z obligacji, wywołanej losowym, równoległym przesunięciem krzywej dochodowości (o dowolnym kształcie):

$$\frac{dP}{P} = -D_{FW} \times dr + V_{FW} \times (dr)^2. \quad (9)$$

Poprzez bezpośrednie różniczkowanie funkcji (5) można łatwo sprawdzić, że wyprowadzone powyżej zależności (8) są równoważne następującym definicjom parametrów  $D_{FW}$  i  $V_{FW}$ :

$$D_{FW} = - \sum_{t=1}^T \frac{\partial P}{\partial r_t} \frac{1}{P}, \quad V_{FW} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 P}{\partial r_t^2} \frac{1}{P}. \quad (10)$$

Warto podkreślić, że przedstawiony powyżej model Fishera-Weila kwantyfikacji ryzyka zmienności stóp procentowych za pomocą parametrów duration  $D_{FW}$  i wypukłości  $V_{FW}$  obligacji został sformułowany przy znacznie bardziej ograniczających założeniach (4) – w porównaniu z rozpatrywanym w następnym punkcie modelem czynnikowym dynamiki zmian krzywej dochodowości. Tak więc zdaniem autora – model ten ma w chwili obecnej znaczenie wyłącznie "historyczne".

#### 4. Analiza czynnikowa dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych

Jednym z nowszych podejść stosowanych w analizie dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych są tzw. modele czynnikowe, w których wykorzystuje się elementy znanej na gruncie statystycznej analizy wielowymiarowej - teorii analizy czynnikowej (*Factor Analysis*); Harman (1967). Modele te są najbardziej ogólne w tym sensie, że w stosunku do dynamiki zmian stóp procentowych  $spot\ r_{0t}$ ,  $t = 1, \dots, T$ , nie wprowadza się żadnych założeń upraszczających, jak to było w przypadku podejść klasycznych, rozpatrywanych m.in. w pracach Fishera, Weila (1971), Bierwaga (1987), Eltona, Grubera (2003), czy też Fabozziego (2006). W zamian za to stawia się hipotezę, że zmiany stóp procentowych  $r_{0t}$  dla kolejnych chwil  $\tau = 1, 2, 3, \dots$ , są generowane przez kombinację liniową pewnej zadanej liczby nieskorelowanych czynników wspólnych (*common factors*) oraz czynników swoistych (*unique factors*), traktowanych jako zmienne resztowe modelu. Należy przy tym dodać, że analizowane czynniki wspólne nie zawsze mają określoną interpretację ekonomiczną lub jakąkolwiek inną; jest to niekiedy możliwe dopiero po przeprowadzeniu tzw. rotacji ortogonalnych przestrzeni czynnikowej. Czynniki te stanowią pewien zbiór



"ukrytych" zmiennych, o których zakłada się, że są one źródłem określonych korelacji pomiędzy układem zmiennych pierwotnych, opisujących dany system.

Z powyższego wynika, że pomimo "zewnętrznego" podobieństwa odnośnych modeli matematycznych, analizowanych czynników wspólnych nie należy w żadnym przypadku utożsamiać ze zmiennymi egzogenicznymi rozpatrywanymi powszechnie w klasycznej analizie regresyjnej. Analiza regresyjna i analiza czynnikowa to dwie istotnie różne metody, u których podstaw stoją różne założenia i przed którymi postawiono różne cele. Celem analizy czynnikowej jest zastąpienie zbioru dużej liczby wzajemnie skorelowanych zmiennych, małą liczbą ortogonalnych (a więc nieskorelowanych) czynników, które w możliwie maksymalny sposób przybliżyłyby zasoby informacji reprezentowanej przez zmienne wyjściowe. Tak więc ortogonalizacja i znaczne zmniejszenie wymiarowości zagadnienia - to dwa cele, jakie postawiono przed analizą czynnikową.

W modelu czynnikowym obligacji, wyznaczającym zależność niespodziewanej stopy zwrotu od ryzyka stóp procentowych, w miejsce klasycznych definicji Macaulaya czy też Fishera-Weila parametrów duration i wypukłości obligacji - wprowadza się tzw. czynniki duration (*factor duration*) i czynniki wypukłości (*factor convexity*). Następnie, analizę niespodziewanych zmian stopy zwrotu portfela obligacji, spowodowanych zmianami  $dr_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) rynkowych stóp procentowych, zastępuje się analizą tych zmian ze względu na zmiany czynników wspólnych  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ). Czynniki te, jako wielkości wspólne dla stóp procentowych  $r_{0t}$ , nie zależą od terminów zapadalności  $t = 1, \dots, T$ ; zależą one jedynie od czasu bieżącego  $\tau = 1, 2, 3, \dots$ . W związku z tym, nie są w rozpatrywanym przypadku potrzebne dodatkowe, upraszczające założenia o kształcie i dynamice zmian krzywej dochodowości (np. przesunięcia tylko równoległe), będące podstawą do definiowania, oraz ewentualnej modyfikacji, klasycznych parametrów duration i wypukłości.

Otrzymane w ten sposób czynnikiowe modele immunizacji nabierają ostatnio coraz większego znaczenia dla teorii i praktyki zarządzania portfelami obligacji; mogą one również stanowić podstawę do tworzenia komercyjnych pakietów komputerowego wspomaganie decyzji w tej dziedzinie. Jak wspomnieliśmy, pierwsze prace z tego zakresu zostały opublikowane przez Garbade'a (1986, 1989), Littermana, Scheinkmana (1991) oraz Dahla (1993). Dotyczyły one czynnikiowej analizy struktury terminowej stóp procentowych oraz konstruowania portfeli immunizacyjnych dla rynków obligacji w USA i w Danii. W Polsce, współautorem pierwszych publikacji z tej dziedziny jest autor niniejszej pracy; Kulikowski, Bury, Jakubowski (1995, 1996); por. też Trzpiot (2009).

Poniżej - oraz w następnych punktach - przedstawimy podstawy teoretyczne rozpatrywanego podejścia. W cytowanych publikacjach zagranicznych podstawy te są podane tylko w bardzo ogólnym zarysie i często bez uzasadnienia wprowadzanych wzorów i zależności. Dlatego, w niniejszej pracy podano niezależne - od istniejących, fragmentarycznych publikacji z tego zakresu - wyprowadzenie od podstaw analizowanych modeli czynnikowych immunizacji i optymalizacji portfeli obligacji oraz przeprowadzono dyskusję tych modeli. Ponadto, w Dodatku D.1 - przedstawiono opis procedur numerycznych niezbędnych dla implementacji prezentowanego modelu w praktyce, w postaci odnośnych pakietów komputerowych.

Oznaczmy:  $\mathbf{X} = [r_{\tau t}]_{M \times T}$  - macierz obserwacji stóp procentowych  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ), dla kolejnych chwil  $\tau = 1, 2, 3, \dots, M$ .

Rynkowe stopy procentowe *spot*  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) traktujemy jako zmienne losowe, przy czym zakładamy, że dysponujemy macierzą obserwacji  $\mathbf{X}$  tych zmiennych utworzoną w ten sposób, że  $t$ -ta kolumna tej macierzy przedstawia realizacje zmiennej losowej  $r_t$  w kolejnych chwilach  $\tau = 1, \dots, M$ . Kolejne wiersze tej macierzy określone są więc przez wektory wierszowe

$$TS(\tau) = [r_1(\tau), \dots, r_t(\tau), \dots, r_T(\tau)] = [r_{\tau 1}, \dots, r_{\tau t}, \dots, r_{\tau T}],$$

reprezentujące zmienność struktury terminowej stóp procentowych  $TS$  z upływem czasu bieżącego  $\tau$  (por. Tabela 1).

Tabela 1. Postać macierzy obserwacji  $\mathbf{X} = [r_{\tau t}]$  o wymiarze  $(M \times T)$

	$r_1$	$\dots$	$r_t$	$\dots$	$r_T$
$TS(\tau = 1)$	$r_{11}$	$\dots$	$r_{1t}$	$\dots$	$r_{1T}$
$TS(\tau = 2)$	$r_{21}$	$\dots$	$r_{2t}$	$\dots$	$r_{2T}$
$\vdots$					
$TS(\tau)$	$r_{\tau 1}$	$\dots$	$r_{\tau t}$	$\dots$	$r_{\tau T}$
$\vdots$					
$TS(\tau = M)$	$r_{M1}$	$\dots$	$r_{Mt}$	$\dots$	$r_{MT}$
	$\bar{r}_1$		$\bar{r}_t$		$\bar{r}_T$
	$\sigma_1$		$\sigma_t$		$\sigma_T$

W ostatnich dwu wierszach Tabeli 1 podano estymatory wartości oczekiwanych  $\bar{r}_t$  oraz odchyłeń standardowych  $\sigma_t$  zmiennych  $r_t$ .

Na podstawie wartości poszczególnych kolumn macierzy obserwacji  $\mathbf{X}$  możemy również wyznaczyć estymatory współczynników kowariancji  $\sigma_{il}$  oraz współczynników korelacji  $\rho_{il}$  pomiędzy stopami procentowymi  $r_t$  oraz  $r_l$  ( $t, l = 1, \dots, T$ ). Współczynniki te tworzą odpowiednio - macierz kowariancji  $\mathbf{R}$  oraz macierz korelacji  $\mathbf{Q}$  o wymiarach  $(T \times T)$ ; postaci tych macierzy przedstawiono w Tabeli 2. Są to oczywiście macierze symetryczne oraz dodatnio określone (z założenia).

Wyznaczona na podstawie obserwacji macierz kowariancji  $\mathbf{R}$  (lub - w alternatywnym sformułowaniu problemu - macierz korelacji  $\mathbf{Q}$ ) ma zasadnicze znaczenie dla prezentowanej metody analizy czynnikowej; stanowi ona bowiem punkt wyjściowy do dalszych rozważań.

Tabela 2. Macierze współczynników kowariancji  $\mathbf{R}$  i korelacji  $\mathbf{Q}$  pomiędzy zmiennymi  $r_t, r_l$  ( $t, l = 1, \dots, T$ )

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1T} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2T} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{T1} & \sigma_{T2} & \dots & \sigma_T^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1T} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2T} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho_{T1} & \rho_{T2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

W modelu czynnikowym stopy procentowe *spot* przedstawimy w postaci następującej kombinacji liniowej ortogonalnych czynników wspólnych oraz czynników swoistych:

$$r_t = \bar{r}_t + \alpha_{t1}F_1 + \dots + \alpha_{tf}F_f + \alpha_{tm}F_m + \alpha_t \varepsilon_t \quad (12)$$

lub też - zapisując to bardziej skrótowo

$$r_t = \bar{r}_t + \sum_{f=1}^m \alpha_{tf} F_f + \alpha_t \varepsilon_t, \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad (13)$$

gdzie  $F_f$  - czynniki wspólne ( $f = 1, \dots, m$ ),  $\varepsilon_t$  - czynniki swoiste ( $t = 1, \dots, T$ ),  $\alpha_{tf}$  - ładunek czynnika wspólnego  $F_f$  w zmiennej  $r_t$  (*common factor loading*),  $\alpha_t$  - ładunek czynnika swoistego w zmiennej  $r_t$  (*unique factor loading*).

W modelu czynnikowym (13) przyjmujemy następujące założenia:

(i) Liczba  $m$  czynników wspólnych jest z góry zadana; przy czym  $m \ll T$ . W praktyce (jak to przedstawimy w dalszej części artykułu),  $m = 3 - 4$ ; natomiast  $T = 20 - 30$ .

(ii) Czynniki wspólne  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ) są wystandaryzowanymi zmiennymi losowymi; tj.  $\bar{F}_f = 0$ ,  $\text{var}(F_f) = 1$ . Czynniki te są wzajemnie nieskorelowane, tj.

$$\rho(F_f, F_k) = 0; \quad \forall f, k = 1, \dots, m \quad (f \neq k), \quad (14)$$

gdzie przez  $\rho(\dots)$  oznaczono współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi. Ponadto, czynniki wspólne  $F_f$  oraz czynniki swoiste  $\varepsilon_t$  są również wzajemnie nieskorelowane, czyli  $\rho(F_f, \varepsilon_t) = 0$ ;  $\forall f = 1, \dots, m; t = 1, \dots, T$ . (15)

(iii) Czynniki swoiste  $\varepsilon_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) są wystandaryzowanymi zmiennymi losowymi; tj.  $\bar{\varepsilon}_t = 0$ ,  $\text{var}(\varepsilon_t) = 1$ . Czynniki te są wzajemnie nieskorelowane, czyli  $\rho(\varepsilon_t, \varepsilon_l) = 0$ ,  $\forall t, l = 1, \dots, T$  ( $t \neq l$ ). (16)

Z przedstawionych powyżej założeń wynika, że każdy czynnik wspólny  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ) ma te same wartości dla wszystkich zmiennych  $r_t$ . Z kolei ładunki



Podsumowując przedstawiony powyżej tok rozumowania można stwierdzić, że metoda analizy czynnikowej wiąże się z założeniem liniowej reprezentacji zbioru wzajemnie skorelowanych zmiennych  $r_t$  - zbiorem zadanej liczby nieskorelowanych między sobą (ukrytych) czynników wspólnych  $F_f$  oraz czynników swoistych  $\varepsilon_t$ , przy czym przyjmuje się, że owe "hipotetyczne" czynniki wspólne są właśnie źródłem korelacji między zmiennymi  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ).

Równanie modelu czynnikowego (13) zapisane dla kolejnych dyskretnych chwil  $\tau = 1, \dots, M$ , ma następującą postać:

$$r_{\tau t} = \bar{r}_t + \sum_{f=1}^m \alpha_{tf} F_{\tau f} + \alpha_t \varepsilon_{\tau t}; \quad \tau = 1, \dots, M; \quad t = 1, \dots, T. \quad (20)$$

W równaniu tym,  $r_{\tau t}$ ,  $F_{\tau f}$  oraz  $\varepsilon_{\tau t}$  oznaczają realizacje (dla  $\tau = 1, \dots, M$ ) zmiennych losowych  $r_t$ ,  $F_f$  oraz  $\varepsilon_t$ . Jak można zauważyć, wartości ładunków czynnikowych  $\alpha_{tf}$  oraz  $\alpha_t$  nie zależą od czasu bieżącego  $\tau = 1, \dots, M$ ; oznacza to, że wartości ładunków czynnikowych są stałym atrybutem rozpatrywanego modelu (co jest niezmiernie istotne z punktu widzenia dalszych rozważań). Natomiast same wartości czynników wspólnych i czynników swoistych zmieniają się oczywiście z upływem czasu bieżącego  $\tau$ .

Zadaniem analizy czynnikowej jest wyznaczenie na podstawie zadanej macierzy obserwacji  $\mathbf{X}$  - oraz przy założeniu liniowego modelu (13) - kolejno następujących wielkości:

- macierzy kowariancji  $\mathbf{R}$  zmiennych  $r_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ ; tj.  $\mathbf{R} = [\sigma_{tt}]_{T \times T}$ , (21)

- ładunków czynników wspólnych  $\alpha_{tf}$  ( $t = 1, \dots, T$ ;  $f = 1, \dots, m$ ); ładunki te tworzą tzw. macierz "zmienna-czynnik" o postaci  $\mathbf{A} = [\alpha_{tf}]_{T \times m}$ , (22)

- ładunków czynników swoistych  $\alpha_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ); ładunki te tworzą macierz diagonalną  $\mathbf{A}_s$  o wymiarze  $T \times T$ , tj.  $\mathbf{A}_s = \text{Diag}(\alpha_t)_{T \times T}$ , (23)

- wartości czynników wspólnych  $F_{\tau f}$  ( $\tau = 1, \dots, M$ ;  $f = 1, \dots, m$ ) będących realizacjami zmiennych losowych  $F_f$  w chwilach  $\tau = 1, \dots, M$ ; wartości te tworzą macierz czynników wspólnych o postaci  $\mathbf{F} = [F_{\tau f}]_{M \times m}$ , (24)

- wartości czynników swoistych  $\varepsilon_{\tau t}$  ( $\tau = 1, \dots, M$ ;  $t = 1, \dots, T$ ); wartości te tworzą macierz czynników swoistych o postaci  $\mathbf{E} = [\varepsilon_{\tau t}]_{M \times T}$ . (25)

Dodatkowo, na początkowym etapie analizy czynnikowej, wyznaczamy również macierz korelacji  $\mathbf{Q} = [\rho_{tt}]_{T \times T}$  pomiędzy zmiennymi  $r_t$ , choć nie jest to bezpośrednio niezbędne dla identyfikacji modelu czynnikowego (13) (w omawianym

wariancie metody). Macierz ta jest natomiast pomocna dla celów interpretacji otrzymanych wyników.

Tak więc etapem końcowym omawianej procedury jest ekstrakcja wartości liczbowych (tj. przebiegów czasowych) "ukrytych" czynników wspólnych  $F_f(\tau)$  ( $f = 1, \dots, m$ ) i czynników swoistych  $\varepsilon_t(\tau)$  ( $t = 1, \dots, T$ ). Dokonuje się tego na podstawie wyjściowej macierzy obserwacji  $\mathbf{X}$  oraz przedstawionego powyżej całego ciągu dosyć rygorystycznych założeń co do analizowanego modelu. W tym też sensie, prezentowany model czynnikowy można zaliczyć do klasy statystycznych modeli "uczących się"; por. Koronacki, Ćwik (2005).

Procedurę numerycznego rozwiązywania przedstawionego powyżej zadania analizy czynnikowej, prowadzącą do identyfikacji modelu (13) przedstawiono w Dodatku D.1.

### 5. Czynniki parametry ryzyka stopy procentowej

W poprzednim punkcie przedstawiliśmy poszczególne etapy identyfikacji modelu czynnikowego (13) rynkowych stóp procentowych  $spot\ r_t$ , określanych dla kolejnych dyskretnych punktów czasowych  $\tau = 1, 2, 3, \dots$ , na podstawie rentowności do wykupu ( $YTM$ ) obligacji czysto-dyskontowych o okresach do wykupu  $t = 1, \dots, T$ . Model ten miał postać

$$r_t = \bar{r}_t + \sum_{f=1}^m \alpha_{tf} F_f + \alpha_t \varepsilon_t, \quad \forall t = 1, \dots, T. \quad (26)$$

Proces identyfikacji modelu polegał w rozpatrywanym przypadku nie tylko na określeniu współczynników  $\alpha_{tf}$ ,  $\alpha_t$  modelu, ale również na wyznaczeniu wartości czynników wspólnych  $F_f(\tau)$  (tj. macierzy  $\mathbf{F}$  danej wzorem (24)) oraz czynników swoistych  $\varepsilon_t(\tau)$  (tj. macierzy  $\mathbf{E}$  o postaci (25)). Jak już wspomnieliśmy, zdecydowanie wyróżnia to powyższe podejście od metodologii analizy regresyjnej, w przypadku której przedmiotem identyfikacji są tylko współczynniki  $\alpha_{tf}$  (oraz ewentualnie  $\alpha_t$ ) modelu liniowego, natomiast  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ) traktowane są jako egzogeniczne zmienne wejściowe o określonej interpretacji ekonomicznej oraz o wartościach znanych bezpośrednio z przeszłych obserwacji. Zauważmy, że w przypadku modelu czynnikowego, wartości "ukrytych" zmiennych  $F_f(\tau)$  wyznacza się dopiero na etapie końcowym konstrukcji modelu.

W dalszych rozważaniach założymy (podobnie jak w prezentowanym poprzednio modelu Fishera-Weila) ciągłą kapitalizację odsetek. Wówczas, wartość bieżąca obligacji wielokuponowej, jako funkcja stóp procentowych  $spot\ r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) - wyraża się wzorem

$$P = P(\mathbf{r}) = P(r_1, \dots, r_t, \dots, r_T) = \sum_{t=1}^T C_t \exp(-r_t t). \quad (27)$$

Podstawowa idea omawianej dalej metody czynnikowej immunizacji zawiera się w następującym spostrzeżeniu: z wyprowadzonego modelu czynnikowego (26) wynika, że zamiast rozpatrywać zmiany  $dP$  wartości obligacji danej wzorem (27) ze względu na zmiany  $dr_t$ , możemy analizować analogiczne zmiany  $dP$  ze względu na zmiany  $dF_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ) czynników wspólnych dla wszystkich stóp procentowych  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ). Ze wzorów (26) i (27) wynika bowiem, że wartość bieżącą  $P$  obligacji możemy traktować jako pewną złożoną funkcję wektora czynników wspólnych  $\mathbf{F} = [F_1, \dots, F_m]$ , tj.

$$P = P(\mathbf{F}) = P(F_1, \dots, F_m). \quad (28)$$

Zauważmy, że funkcja  $P(\mathbf{F})$  jest ciągła wraz z wszystkimi pochodnymi cząstkowymi dowolnego rzędu. Z formalnego punktu widzenia, funkcję tę możemy więc traktować jako pewne gładkie odwzorowanie wektora czynników wspólnych  $\mathbf{F}$  w przestrzeń  $R^1$ .

Dynamikę nieoczekiwanych losowych zmian wzajemnie nieskorelowanych czynników wspólnych  $F_1(\tau), \dots, F_m(\tau)$  z wpływem czasu bieżącego  $\tau$ , wywołujących określoną zmianę kształtu struktury terminowej  $TS(\tau)$  - można modelować w postaci następującego stochastycznego równania różniczkowego  $Itô$ :

$$dF_f(\tau) = \mu_f d\tau + \sigma_f dW_f(\tau), \quad \forall f = 1, \dots, m, \quad (29)$$

gdzie  $\mu_f$  - współczynnik dryfu (*drift*),  $\sigma_f$  - współczynnik zmienności (*volatility*), przy czym  $\mu_f, \sigma_f$  są danymi stałymi; zaś  $W_f(\tau)$  to standardowy proces stochastyczny Wienera, tj. proces gaussowski o przyrostach niezależnych i parametrach  $W_f \sim N(0, \tau)$ .

Ponadto zakładamy, że procesy Wienera  $W_f(\tau), W_l(\tau)$  ( $f, l = 1, \dots, m; f \neq l$ ) są wzajemnie niezależne. Z formalnego punktu widzenia, równanie (29) określa więc różniczkę stochastyczną  $d\mathbf{F}(\tau)$  wektorowego procesu  $\mathbf{F} = [F_1, \dots, F_m]$  o nieskorelowanych współrzędnych. Skorzystamy teraz z następującego lematu:

**Lemat 1.** Załóżmy, że różniczka stochastyczna  $d\mathbf{F}(\tau)$  wektora nieskorelowanych czynników wspólnych dana jest wzorem (29). Wówczas różniczka stochastyczna  $Itô$  wartości bieżącej  $P(\mathbf{F})$  obligacji wyraża się wzorem:

$$dP(\mathbf{F}) = dP(F_1, \dots, F_m) = \sum_{f=1}^m \frac{\partial P}{\partial F_f} dF_f + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} (dF_f)^2. \quad (30)$$

**Dowód** - zawarty jest w Dodatku D.2.

Zauważmy, że podany w powyższym lemacie wzór (30) na różniczkę stochastyczną  $Itô$  wartości bieżącej  $dP(\mathbf{F}) = dP(F_1, \dots, F_m)$  jest uogólnieniem klasycznego wzoru na różniczkę zupełną funkcji wielu zmiennych, rozpatrywanego w przypadku deterministycznym. Różnica jest taka, że w przypadku różniczki stochastycznej  $Itô$  występuje dodatkowo człon zawierający pochodne drugiego rzędu. Warto również podkreślić, że w dalszych rozważaniach dotyczących zagadnienia immunizacji portfela obligacji, nie będziemy więcej korzystać z równania stochastycznego (29) ewolucji czasowej czynników wspólnych  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ). Tak więc - dla naszych celów - nie zaistnieje konieczność identyfikacji parametrów dryfu  $\mu_f$  oraz zmienności  $\sigma_f$ , co w praktyce mogłoby być dosyć kłopotliwe.

Dzieląc obie strony równania (30) przez  $P$ , otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = \sum_{f=1}^m \left[ \frac{\partial P}{\partial F_f} \frac{1}{P} \right] dF_f + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} \frac{1}{P} \right] (dF_f)^2. \quad (31)$$

We wzorze (31), wyrażenie występujące w pierwszym nawiasie prostokątnym (wzięte ze znakiem "-") definiujemy jako czynnikowe duration  $D_f$  obligacji; natomiast wyrażenie w drugim nawiasie prostokątnym (pomnożone przez  $1/2$ ) - określamy jako czynnikową wypukłość  $V_f$ . Mamy więc

$$D_f \triangleq - \frac{\partial P}{\partial F_f} \frac{1}{P}, \quad V_f \triangleq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} \frac{1}{P}, \quad \forall f = 1, \dots, m. \quad (32)$$

A zatem, z (31) i (32) otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = - \sum_{f=1}^m D_f dF_f + \sum_{f=1}^m V_f (dF_f)^2, \quad (33)$$

gdzie wielkość  $dP/P$  nazywamy niespodziewaną stopą zwrotu z obligacji wywołaną nieoczekiwanymi zmianami  $dF_f$  czynników wspólnych ( $f = 1, \dots, m$ ).

W celu wyznaczenia parametrów duration  $D_f$  oraz wypukłości  $V_f$ , danych zależnościami (32), a tym samym obliczenia odnośnych pierwszych i drugich pochodnych funkcji  $P(\mathbf{F})$  danej wzorami (26) i (27), skorzystamy ze wzorów na pochodną funkcji złożonej. Mamy zatem

$$\frac{\partial P}{\partial F_f} = \sum_{t=1}^T \frac{\partial P}{\partial r_t} \frac{\partial r_t}{\partial F_f} = - \sum_{t=1}^T t \alpha_{tf} C_t e^{-r_t t}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} = \frac{\partial}{\partial F_f} \left( \frac{\partial P}{\partial F_f} \right) = \sum_{t=1}^T \frac{\partial}{\partial r_t} \left( \frac{\partial P}{\partial F_f} \right) \frac{\partial r_t}{\partial F_f} = \sum_{t=1}^T t^2 \alpha_{tf}^2 C_t e^{-r_t t}. \quad (35)$$



Z (32), (34) i (35) otrzymamy więc końcową postać wzorów na parametry  $D_f$  i  $V_f$ :

$$D_f \triangleq -\frac{\partial P}{\partial F_f} \frac{1}{P} = \sum_{t=1}^T t \alpha_{tf} C_t e^{-r_t} / P, \quad \forall f = 1, \dots, m, \quad (36)$$

$$V_f \triangleq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} \frac{1}{P} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T t^2 \alpha_{tf}^2 C_t e^{-r_t} / P, \quad \forall f = 1, \dots, m. \quad (37)$$

Wyprowadzone powyżej wzory (33), (36) i (37) stanowią kompletny układ zależności, za pomocą których możemy oszacować niespodziewaną stopę zwrotu  $dP/P$  z obligacji wywołaną nieoczekiwaną zmianą struktury terminowej  $TS$  stóp procentowych  $spot r_t$ , przy założeniu, że zmiany te są reprezentowane przez nieskorelowane wahania  $dF_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ) ortogonalnych czynników wspólnych.

Zauważmy, że wzory (36) i (37) na czynnikowe duration  $D_f$  i czynnikową wypukłość  $V_f$  obligacji są bezpośrednimi uogólnieniami analogicznych wzorów (8) definiujących parametr duration  $D_{FW}$  i wypukłość  $V_{FW}$  obligacji, w przypadku rozpatrywanego wcześniej modelu Fishera-Weila, sformułowanego przy założeniu wyłącznie równoległych przesunięć  $dr$  krzywej dochodowości. Z formalnego punktu widzenia, wzory te różnią się tylko tym, że w przypadku modelu czynnikowego występują w odnośnych zależnościach dodatkowo współczynniki (tj. ładunki czynnikowe)  $\alpha_{tf}$ . Również wzór (33) określający niespodziewaną stopę zwrotu z obligacji jest bezpośrednim uogólnieniem analogicznego wzoru (9); porównanie obu modeli zestawiono w Tabeli 3.

Tabela 3. Porównanie modelu Fishera-Weila i modelu czynnikowego

Model Fishera-Weila	Model czynnikowy
$\frac{dP}{P} = -D_{FW} dr + V_{FW} (dr)^2$	$\frac{dP}{P} = -\sum_{f=1}^m D_f dF_f + \sum_{f=1}^m V_f (dF_f)^2$
$D_{FW} \triangleq -\sum_{t=1}^T \frac{\partial P}{\partial r_t} \frac{1}{P} = \sum_{t=1}^T t C_t e^{-r_t} / P =$ $= \sum_{t=1}^T x_t t$	$D_f \triangleq -\frac{\partial P}{\partial F_f} \frac{1}{P} = \sum_{t=1}^T t \alpha_{tf} C_t e^{-r_t} / P =$ $= \sum_{t=1}^T \alpha_{tf} x_t t, \quad \forall f = 1, \dots, m$
$V_{FW} \triangleq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 P}{\partial r_t^2} \frac{1}{P} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T t^2 C_t e^{-r_t} / P =$ $= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T x_t t^2$	$V_f \triangleq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} \frac{1}{P} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T t^2 \alpha_{tf}^2 C_t e^{-r_t} / P =$ $= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \alpha_{tf}^2 x_t t^2, \quad \forall f = 1, \dots, m$

Bardziej wnikliwa analiza porównawcza powyższych podejść prowadzi jednak do dalszych wniosków. Przede wszystkim zauważmy, że współczynnik  $\alpha_{ff}$  występujący m.in. we wzorze (36) określającym parametr czynnikowego duration  $D_f$  obligacji - może być dowolnego znaku. Tak więc wpływ zmiany  $dF_f$  czynników wspólnych na niespodziewaną stopę zwrotu  $dP/P$  - modelowany za pomocą równania (33) - ma o wiele bardziej złożoną naturę, w porównaniu z analogicznym wpływem nieoczekiwanego, równoległego przesunięcia  $dr$  krzywej dochodowości, rozpatrywanego w modelu Fishera-Weila za pomocą równania (9). W tym ostatnim równaniu, parametr duration  $D_{FW}$  przybiera bowiem zawsze wartości dodatnie.

Drugą istotną różnicą pomiędzy modelem Fishera-Weila a modelem czynnikowym jest to, że wprowadzenie definicji zarówno czynnikowego duration (36) jak i czynnikowej wypukłości (37) wiąże się z przyjęciem po  $m$  parametrów  $D_f$  i  $V_f$  dla każdej z rozpatrywanych obligacji wielokuponowych, ponieważ rozpatrujemy łączne oddziaływanie  $m$  czynników wspólnych  $F_f$ . Natomiast w przypadku modelu Fishera-Weila (jak też i w przypadku innych podejść klasycznych) dla każdej obligacji definiujemy tylko po jednym parametrze duration i wypukłości. Jednak w przypadku modelu czynnikowego nie powinno to być zbyt kłopotliwe, ponieważ - jak wykazują dotychczasowe doświadczenia - w praktyce, na rozwiniętych rynkach kapitałowych, wzięcie pod uwagę  $m = 3\div 4$  czynników prowadziło do wyjaśnienia ok. 95% tzw. *zasobów zmienności ogólnej* rynkowych stóp procentowych  $spot\ r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ).

Również w opracowanym m.in. przez autora niniejszej pracy modelu czynnikowym struktury terminowej stóp procentowych charakteryzującej rynek finansowy w Polsce w okresie marzec 1994 – grudzień 1996 (dane comiesięczne) wyróżniono 3 istotne czynniki wspólne. Czynniki te wyjaśniały łącznie aż 99.93% zasobów zmienności ogólnej analizowanych stóp procentowych; przy czym czynnik  $F_1$  wyjaśniał 98.3% zmienności, czynnik  $F_2$  - 1.2%, a czynnik  $F_3$  - 0.5%; por. Kulikowski, Bury, Jakubowski (1995, 1996).

Biorąc dodatkowo pod uwagę fakt, że na rynkach finansowych rozpatruje się struktury terminowe stóp procentowych dla terminów zapadalności od 1 roku do 30 lat - a więc w sumie dla  $T = 30$  zmiennych  $r_t$  - otrzymana w wyniku modelu czynnikowego redukcja liczby zmiennych objaśniających (przy minimalnej stracie informacji) - jest rzeczywiście bardzo znacząca. Wynika to zresztą z samej specyfiki metody analizy czynnikowej, w ramach której - jako punkt wyjściowy do rozważań rozpatrujemy na ogół silnie skorelowane stopy procentowe  $r_t$ . Zauważmy, że gdyby wszystkie współczynniki korelacji  $\rho_{it}$  pomiędzy analizowanymi zmiennymi  $r_t, r_l$  ( $t, l = 1, \dots, T; t \neq l$ ) były równe jedności - do analizy układu  $T$  tych zmiennych, wystarczyłby jeden czynnik wspólny  $F_1$ .

W modelu czynnikowym opracowanym dla rynku amerykańskiego zidentyfikowano  $m = 3$  istotne czynniki wspólne (Litterman, Scheinkman, 1991):

- $F_1$  - czynnik wpływający na ogólny poziom stóp procentowych  $r_t$ ; tzw. czynnik poziomu (*level factor*);

- $F_2$  - czynnik wpływający na nachylenie krzywej dochodowości;  
tzw. czynnik nachylenia (*steepness factor*);
- $F_3$  - czynnik wpływający na stopień zakrzywienia krzywej dochodowości;  
tzw. czynnik krzywizny (*curvature factor*).

W celu bliższego wyjaśnienia takiej właśnie interpretacji tych czynników, wygodnie jest przedstawić analizowany dla czynników  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$  model czynnikowy (26) tak - jak to podano w Tabeli 4.

Tabela 4. Model czynnikowy dla trzech czynników wspólnych  $F_1, F_2, F_3$

$$\begin{array}{l}
 r_1 = \bar{r}_1 + \alpha_{11}F_1 + \alpha_{12}F_2 + \alpha_{13}F_3 + \alpha_1\varepsilon_1 \\
 r_2 = \bar{r}_2 + \alpha_{21}F_1 + \alpha_{22}F_2 + \alpha_{23}F_3 + \alpha_2\varepsilon_2 \\
 \vdots \\
 r_t = \bar{r}_t + \alpha_{t1}F_1 + \alpha_{t2}F_2 + \alpha_{t3}F_3 + \alpha_t\varepsilon_t \\
 \vdots \\
 r_T = \bar{r}_T + \alpha_{T1}F_1 + \alpha_{T2}F_2 + \alpha_{T3}F_3 + \alpha_T\varepsilon_T
 \end{array}$$

Zauważmy, że gdy wszystkie ładunki czynnikowe ( $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{t1}, \dots, \alpha_{T1}$ ) czynnika  $F_1$  w zmiennych  $r_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) są dodatnie - to wzrost lub spadek  $dF_1$  wartości tego czynnika (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych) będzie powodował jednoczesny wzrost lub spadek poziomu wszystkich analizowanych stóp procentowych *spot*  $r_t$ . Czynnik  $F_1$  można więc nazwać - *czynnikiem poziomym*.

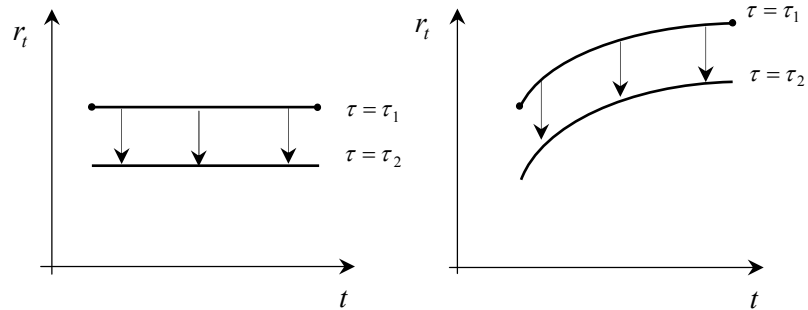
Ponadto, gdy początkowe wartości ciągu ładunków czynnikowych ( $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{t2}, \dots, \alpha_{T2}$ ) stojących przy czynniku  $F_2$  są dodatnie, natomiast wartości końcowe tego ciągu są ujemne (lub na odwrót) - to wzrost lub spadek  $dF_2$  tego czynnika (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych) - będzie powodował zmianę nachylenia analizowanej krzywej dochodowości. Czynnik  $F_2$  jest nazywany w tym przypadku - *czynnikiem nachylenia*.

Natomiast, gdy skrajne wartości ciągu ładunków czynnikowych ( $\alpha_{13}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{t3}, \dots, \alpha_{T3}$ ) stojących przy czynniku  $F_3$  są tego samego znaku, zaś środkowe wartości tego ciągu są znaku przeciwnego - to wzrost lub spadek  $dF_3$  czynnika  $F_3$  (przy pozostałych czynnikach nie zmienionych) stanie się przyczyną określonego odkształcenia krzywej dochodowości w górę lub w dół. Czynnik  $F_3$  można więc nazwać w tym przypadku - *czynnikiem krzywizny*.

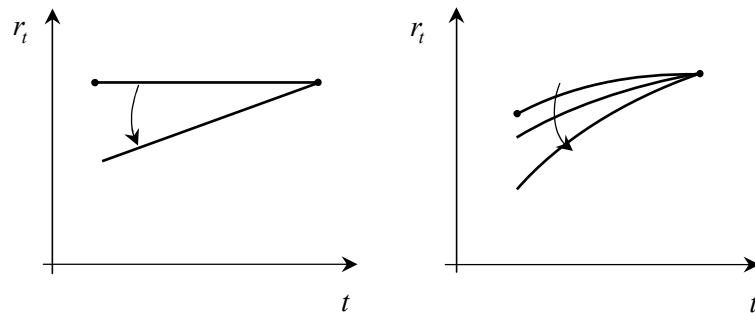
Całkowity kształt analizowanej krzywej dochodowości wynika więc z "liniowego" nałożenia się oddziaływań rozpatrywanych czynników wspólnych, zgodnie z modelem czynnikowym z Tabeli 4. Ilustrację graficzną tych oddziaływań można

sobie wyobrazić tak, jak to przedstawiono na Rys. 3. W lewej części tego rysunku zilustrowano dynamiczne zmiany początkowo płaskiej krzywej dochodowości; natomiast w prawej części rysunku - przedstawiono analogiczne zmiany, przy założeniu, że początkowy przebieg tej krzywej był nieliniowy.

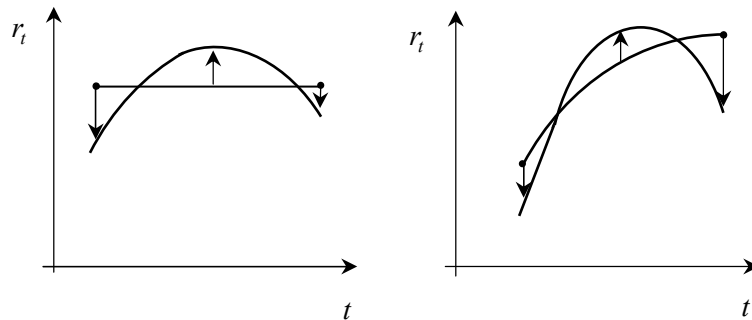
$F_1$  - czynnik poziomu



$F_2$  - czynnik nachylenia



$F_3$  - czynnik krzywizny



Rys. 3. Ilustracja oddziaływań czynników wspólnych  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$  na strukturę terminową stóp procentowych;  $\tau$  - czas bieżący.

## 6. Czynnikiowa immunizacja i optymalizacja portfela obligacji

Przedstawimy najpierw czynnikiowy model immunizacji portfela obligacji ze względu na ryzyko nieoczekiwanych zmian struktury terminowej  $TS(\tau)$  rynkowych stóp procentowych  $spot\ r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ). Przyjmujemy, że dla danego rynku finansowego obowiązuje ciągła kapitalizacja odsetek, krzywa dochodowości może mieć dowolny kształt oraz dynamika zmian tej krzywej jest zadana modelem czynnikiowym (26).

### 6.1. Warunki konieczne i dostateczne immunizacji

Naszym zadaniem będzie konstrukcja takiego portfela  $\mathbf{P}$  obligacji  $O_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), aby portfel ten zapewniał spełnienie przyszłych zobowiązań stojących przed inwestorem – niezależnie od nieoczekiwanych, losowych zmian struktury terminowej  $TS(\tau)$  stóp procentowych, jakie mogą wystąpić bezpośrednio po zakupie portfela  $\mathbf{P}$ . Innymi słowy, portfel  $\mathbf{P}$  obligacji powinien być zimmunizowany ze względu na ryzyko stopy procentowej.

Podstawą dalszych rozważań będzie założenie, że przyszłe zobowiązania  $L_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) stojące przed inwestorem możemy potraktować jako istnienie pewnej wirtualnej obligacji  $O_L$  o strumieniu finansowym określonym przez ten strumień zobowiązań. W przypadku pojedynczego przyszłego zobowiązania owa "obligacja"  $O_L$  będzie w powyższym ujęciu obligacją czysto-dyskontową o terminie zapadalności równym terminowi zobowiązania. Z powyższego wynika, że formalnie rzecz biorąc, analogicznie jak dla rzeczywiście istniejących na danym rynku obligacji (lub portfeli obligacji) – również w stosunku do strumienia przyszłych zobowiązań – możemy definiować takie wielkości, jak wartość bieżąca czy też parametry duration i wypukłości. Wielkości te definiowane są według identycznych zależności, jak to miało miejsce w przypadku obligacji, tj. odpowiednio według wzorów (27), (36) i (37). Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$x_i$  - liczba obligacji  $O_i$  w portfelu  $\mathbf{P}$ ;  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$\mathbf{F} = [F_1, \dots, F_f, \dots, F_m]^T$  - wektor nieskorelowanych czynników wspólnych,

$P_i = P_i(r_1, \dots, r_t, \dots, r_T)$  - wartość bieżąca obligacji  $O_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$P = \sum_{i=1}^n x_i P_i$  - wartość bieżąca portfela  $\mathbf{P}$  obligacji,

$P_L = P_L(r_1, \dots, r_t, \dots, r_T)$  - wartość bieżąca strumienia zobowiązań,

$D_{fi}$  - czynnikiowe duration obligacji  $O_i$ ,  $f = 1, \dots, m$ ,

$D_{fL}$  - czynnikiowe duration zobowiązania finansowego  $O_L$ ,  $f = 1, \dots, m$ ,

$V_{fi}$  - czynnikiowa wypukłość obligacji  $O_i$ ,  $f = 1, \dots, m$ ,

$V_{fL}$  - czynnikiowa wypukłość zobowiązania finansowego  $O_L$ ,  $f = 1, \dots, m$ .

Biorąc pod uwagę, że dla danego rynku finansowego zidentyfikowano model czynnikowy struktury terminowej stóp procentowych *spot*  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ), z zależności (26) i (27) wynika, że zarówno wartości bieżące obligacji  $O_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) jak i wartość bieżącą strumienia zobowiązań  $O_L$  możemy traktować jako złożone, gładkie funkcje wektora czynników wspólnych; tj.  $P_i = P_i(\mathbf{F})$  oraz  $P_L = P_L(\mathbf{F})$ . To samo dotyczy wartości netto  $W = W(\mathbf{F})$  portfela, którą definiujemy następująco:

$$W(\mathbf{F}) \triangleq W(F_1, \dots, F_m) = P(\mathbf{F}) - P_L(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^n x_i P_i(\mathbf{F}) - P_L(\mathbf{F}). \quad (38)$$

Podstawową ideę zagadnienia czynnikowej immunizacji portfela  $\mathbf{P}$  możemy teraz wyrazić następująco. Warunkiem koniecznym wypełnienia zadania immunizacji jest aby  $W(\mathbf{F}) = 0$ , tj. aby wartość bieżąca portfela obligacji była równa wartości bieżącej zobowiązań, czyli  $P = P_L$ . Wówczas, o ile w zadanym horyzoncie czasowym struktura terminowa stóp procentowych się nie zmieni, to wyznaczona dla tego horyzontu wartość przyszła  $FV$  analizowanego portfela  $\mathbf{P}$  aktywów będzie oczywiście równa wartości przyszłej  $(FV)_L$  zobowiązań, ponieważ obie (równe sobie) wartości bieżące  $P = P_L$  będą kapitalizowane "w przód" według tych samych rynkowych stóp procentowych *spot*  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ).

Natomiast warunkiem koniecznym i jednocześnie dostatecznym wypełnienia analizowanego zadania immunizacji jest, aby oprócz warunku "wstępnego" dopasowania wartości bieżących aktywów i zobowiązań (tj.  $W(\mathbf{F}) = 0$ ) – zachodziło również  $W(\mathbf{F} + d\mathbf{F}) \geq 0$ , przy czym ma to nastąpić niezależnie od kierunku zmian  $dF_f$  czynników wspólnych  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ). A tym samym, ma to nastąpić niezależnie od wzrostu lub spadku poziomu krzywej dochodowości czy też – od sposobu zmiany kształtu tej krzywej (zmiana nachylenia, pojawianie się różnych "wygarbiń", itp.). Wówczas – o ile powyższa, nieoczekiwana zmiana krzywej dochodowości wystąpi tylko jeden raz w zadanym horyzoncie czasowym i to zaraz po nabyciu portfela  $\mathbf{P}$  - wartość przyszła  $FV$  aktywów będzie wyższa lub równa wartości  $(FV)_L$  zobowiązań, z tych samych powodów – co poprzednio.

Należy w tym miejscu wyraźnie podkreślić, że w przypadku omawianego zagadnienia immunizacyjnego nie chodzi nam o ścisłe dopasowanie przyszłych strumieni aktywów (wynikających z posiadania portfela  $\mathbf{P}$ ) do przyszłych strumieni zobowiązań (tzw. *cash-flow matching*). Zagadnienie uzyskania takiego ścisłego dopasowania strumieni finansowych należy do innej klasy problemów, rozpatrywanych w ramach konstrukcji tzw. portfeli dedykowanych (*dedicated portfolios*); por. Elton, Gruber (2005), Fabozzi, Fong (1994), Fabozzi (2006). Tak więc, w przypadku zagadnienia immunizacji rozpatrujemy nie tyle ścisłe dopasowanie strumieni aktywów i zobowiązań – co ścisłe dopasowanie wartości bieżących tych strumieni.

Stosując podany w punkcie 5 Lemat 1 - w odniesieniu do wartości netto analizowanego portfela - otrzymamy, że różniczka stochastyczna *Itô* gładkiej (nielosoowej) funkcji  $W(\mathbf{F})$  wyraża się wzorem o postaci analogicznej do wzoru (30), tj.

$$dW(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F} + d\mathbf{F}) - W(\mathbf{F}) = \sum_{f=1}^m \frac{\partial W}{\partial F_f} dF_f + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \frac{\partial^2 W}{\partial F_f^2} (dF_f)^2. \quad (39)$$

Biorąc pod uwagę definicje (36) i (37) czynnikowego duration oraz czynnikowej wypukłości, otrzymamy

$$\frac{\partial P_i}{\partial F_f} = -D_{fi} P_i, \quad \frac{\partial P_L}{\partial F_f} = -D_{fL} P_L, \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial F_f^2} = 2V_{fi} P_i, \quad \frac{\partial^2 P_L}{\partial F_f^2} = 2V_{fL} P_L. \quad (41)$$

A zatem, w zależności (39) – biorąc pod uwagę (38) - mamy

$$\frac{\partial W}{\partial F_f} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial P_i}{\partial F_f} - \frac{\partial P_L}{\partial F_f} = - \left( \sum_{i=1}^n x_i D_{fi} P_i - D_{fL} P_L \right), \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial F_f^2} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial^2 P_i}{\partial F_f^2} - \frac{\partial^2 P_L}{\partial F_f^2} = 2 \left( \sum_{i=1}^n x_i V_{fi} P_i - V_{fL} P_L \right). \quad (43)$$

Tak więc, z (39) oraz (42) i (43) otrzymamy

$$\begin{aligned} dW(\mathbf{F}) &= W(\mathbf{F} + d\mathbf{F}) - W(\mathbf{F}) = \\ &= - \sum_{f=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_i D_{fi} P_i - D_{fL} P_L \right) dF_f + \sum_{f=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_i V_{fi} P_i - V_{fL} P_L \right) (dF_f)^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Z zależności (44), uwzględniając dodatkowo, że  $W(\mathbf{F})$  dane jest wzorem (38), otrzymamy ostatecznie

$$\begin{aligned} W(\mathbf{F} + d\mathbf{F}) &= W(\mathbf{F}) + dW(\mathbf{F}) = \left( \sum_{i=1}^n x_i P_i - P_L \right) + \\ &- \sum_{f=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_i D_{fi} P_i - D_{fL} P_L \right) dF_f + \sum_{f=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_i V_{fi} P_i - V_{fL} P_L \right) (dF_f)^2, \end{aligned} \quad (45)$$

gdzie  $P_i = P_i(\mathbf{F})$  oraz  $P_L = P_L(\mathbf{F})$ .

Na podstawie zależności (45) formułujemy następujące warunki konieczne i dostateczne immunizacji portfela  $\mathbf{P}$ :

$$(i) \quad W(\mathbf{F}) = 0 \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n x_i P_i(\mathbf{F}) = P_L. \quad (46)$$

Jak już wspomnieliśmy, jest to pewien "warunek początkowy" dla rozpatrywanego zagadnienia, będący warunkiem koniecznym immunizacji. Warunek ten oznacza, że wartość bieżąca portfela  $\mathbf{P}$  obligacji powinna być równa wartości bieżącej strumienia zobowiązań, dla obowiązujących w danej chwili rynkowych stóp procentowych *spot*  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ); czyli – dla zadanego wektora czynników wspólnych  $\mathbf{F}$ .

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^n x_i D_{f_i} P_i = D_{f_L} P_L, \quad \forall f = 1, \dots, m, \quad (47)$$

$$(iii) \quad \sum_{i=1}^n x_i V_{f_i} P_i \geq V_{f_L} P_L, \quad \forall f = 1, \dots, m. \quad (48)$$

Uwzględniając warunki (46)-(48) we wzorze (45), otrzymamy więc

$$W(\mathbf{F} + d\mathbf{F}) = \sum_{f=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_i V_{f_i} P_i - V_{f_L} P_L \right) (dF_f)^2 \geq 0, \quad (49)$$

a ponadto, z definicji, mamy

$$W(\mathbf{F} + d\mathbf{F}) \triangleq P(\mathbf{F} + d\mathbf{F}) - P_L(\mathbf{F} + d\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^n x_i P_i(\mathbf{F} + d\mathbf{F}) - P_L(\mathbf{F} + d\mathbf{F}). \quad (50)$$

Tym samym, bezpośrednio z (49) i (50) wynika, że spełniony jest wówczas warunek immunizacji analizowanego portfela  $\mathbf{P}$ , tj.

$$P(\mathbf{F} + d\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^n x_i P_i(\mathbf{F} + d\mathbf{F}) \geq P_L(\mathbf{F} + d\mathbf{F}). \quad (51)$$

Reasumując, otrzymaliśmy, że o ile warunki immunizacji (46)-(48) są spełnione, to jakakolwiek zmiana  $d\mathbf{F}$  wektora czynników wspólnych reprezentująca określoną zmianę struktury terminowej stóp procentowych *spot*  $\{r_1, \dots, r_t, \dots, r_T\}$ , powoduje dodatni przyrost  $dW = W(\mathbf{F} + d\mathbf{F}) - W(\mathbf{F})$  wartości netto portfela w stosunku do początkowej wartości  $W(\mathbf{F}) = 0$ . Powyższe zachodzi niezależnie od kierunku zmian poziomu rynkowych stóp procentowych  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) czy też – od zmiany kształtu krzywej dochodowości. Analizowane zadanie immunizacji portfela  $\mathbf{P}$  obligacji jest więc wypełnione dla całego rozpatrywanego horyzontu inwestycyjnego - o ile tylko będą jeszcze spełnione dwa dodatkowe warunki.

A mianowicie, o ile owa nieoczekiwana zmiana stóp procentowych  $r_t$  wystąpi (jeżeli w ogóle) zaraz po zakupie portfela  $\mathbf{P}$  obligacji oraz – po wystąpieniu zmiany stóp  $r_t$ , stopy te pozostaną nie zmienione aż do końca analizowanego horyzontu czasowego. Warunki te wynikają bezpośrednio z określonej niestabilności parametrów rozpatrywanego modelu immunizacyjnego. Chodzi w tym przypadku o to, że parametry czynnikowego duration  $D_f$  jak i czynnikowej wypukłości  $V_f$  dane



wzorami (36) i (37), zależą zarówno od bieżącego poziomu stóp procentowych  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) jak i też – od upływu czasu bieżącego  $\tau$  (co wynika ze skrócenia terminu do wykupu  $T$  występującego w górnych granicach sum cytowanych wzorów).

Tak więc portfel  $\mathbf{P}$  raz zimmunizowany (dla chwili  $\tau = 0$ ) ze względu na ryzyko stóp procentowych, powinien być z upływem czasu bieżącego okresowo uaktualniany (tzw. *rebalancing*) do panujących w danej chwili warunków. Jest to zresztą cecha wspólna wszystkich (a więc nie tylko czynnikowych) modeli immunizacyjnych. Wpływa to oczywiście w określonym stopniu na koszt ich obsługi; por. Bierwag (1987).

Interpretacja warunków koniecznych i dostatecznych (i)-(iii) czynnikowej immunizacji portfela  $\mathbf{P}$ , danych zależnościami (46)-(48), jest następująca.

Oznaczmy:

$$w_i \triangleq x_i P_i / P \quad \text{- procentowy udział obligacji } O_i \text{ w portfelu } \mathbf{P}; \quad (52)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w_i \in [0, 1], \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (53)$$

Uwzględniając, dodatkowo, warunek konieczny immunizacji (46), a więc  $P = \sum_{i=1}^n x_i P_i = P_L$ , mamy  $w_i = x_i P_i / P_L$ , a stąd

$$x_i = w_i P_L / P_i, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (54)$$

Podstawiając (54) do (47) i (48) – po prostych przekształceniach – otrzymamy, że zależności (47) oraz (48) są odpowiednio równoważne następującym warunkom:

$$\sum_{i=1}^n w_i D_{fi} = D_{fL}, \quad \forall f = 1, \dots, m, \quad (55)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i V_{fi} \geq V_{fL}, \quad \forall f = 1, \dots, m. \quad (56)$$

Można wykazać (Jakubowski, 2009), że czynnikowe duration  $D_{fP}$  oraz czynnikowa wypukłość  $V_{fP}$  portfela  $\mathbf{P}$  obligacji są kombinacjami wypukłymi parametrów duration i wypukłości poszczególnych obligacji  $O_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) wchodzących w skład tego portfela, tj. uwzględniając (53) - mamy

$$D_{fP} = \sum_{i=1}^n w_i D_{fi} \quad \text{oraz} \quad V_{fP} = \sum_{i=1}^n w_i V_{fi}, \quad \forall f = 1, \dots, m. \quad (57)$$

Można więc stwierdzić, że warunek immunizacji (47), równoważny warunkowi (55), a więc oznaczający dostosowanie czynnikowego duration  $D_{fP}$  portfela  $\mathbf{P}$  obligacji do czynnikowego duration  $D_{fL}$  zobowiązań, pociąga za sobą identyczną

wrażliwość tego portfela i strumienia zobowiązań – na nieoczekiwane zmiany  $dF$  czynników wspólnych  $F_1, F_2, \dots, F_m$ . Ze wzoru (33) na niespodziewaną stopę zwrotu  $(dP/P)$  dowolnej obligacji bądź portfela obligacji, przy pominięciu członu drugiego rzędu – mamy bowiem (w przybliżeniu)

$$\frac{dP}{P} \approx - \sum_{f=1}^m D_f dF_f . \quad (58)$$

Natomiast warunek (48) równoważny jest warunkowi (56), a więc, aby czynnikowa wypukłość  $V_{fP}$  portfela  $\mathbf{P}$  obligacji była nie mniejsza niż czynnikowa wypukłość  $V_{fL}$  strumienia zobowiązań. Zauważmy, że o ile warunek ten jest spełniony, to losowa zmienność  $d\mathbf{F}$  czynników wspólnych wywołuje dodatni przyrost  $dW(\mathbf{F})$  wartości netto portfela, przy czym zachodzi to niezależnie od kierunku zmian tych czynników. Wynika to bezpośrednio ze wzoru (49), wobec oczywistej nierówności  $(dF_f)^2 \geq 0$ . W klasycznej teorii zarządzania portfelem obligacji, opisane powyżej zjawisko nosi nazwę tzw. efektu wypukłości; por. Elton, Gruber (2003). Tak więc powyżej wykazaliśmy, że efekt ten występuje również w przypadku czynnikowego modelu immunizacji.

### 6.2. Optymalizacja portfela zimmunizowanego

Jak można łatwo zauważyć, warunki konieczne i dostateczne immunizacji (46)-(48) wyznaczają łącznie  $2m+1$  ograniczeń równościowych i nierównościowych na zmienne decyzyjne  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), gdzie  $x_i$  - liczba obligacji  $O_i$  w portfelu  $\mathbf{P}$ . Tak więc, dla  $n > 2m+1$  mamy wiele (lub nieskończenie wiele) możliwości konstrukcji portfela zimmunizowanego, ze względu na ryzyko nieoczekiwanych zmian stóp procentowych. Pozwala to na sformułowanie dodatkowego kryterium wyboru optymalnego – w określonym sensie – portfela  $\mathbf{P}$  obligacji. Kryterium to określamy w postaci pewnej funkcji celu  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ; przy czym warunki immunizacji (46)-(48) traktujemy jako ograniczenia (tj. więzy) analizowanego zagadnienia optymalizacji. Tak więc, nie wnikając głębiej w szczegóły matematyczne określenia postaci funkcji  $Q(\cdot)$ , zadanie optymalnego wyboru portfela zimmunizowanego możemy łącznie zapisać następująco: należy określić takie optymalne wartości  $\hat{x}_i \geq 0$  ( $i=1, \dots, n$ ), aby zachodziło

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow[\{x_i\}]{} MAX , \quad (59)$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^n P_i x_i = P_L ; \quad x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n , \quad (60)$$

$$\sum_{i=1}^n D_{fi} P_i x_i = D_{fL} P_L , \quad \forall f = 1, \dots, m , \quad (61)$$

$$\sum_{i=1}^n V_{fi} P_i x_i \geq V_{fL} P_L , \quad \forall f = 1, \dots, m . \quad (62)$$

Zagadnienie optymalizacji (59)-(62) jest typowym zadaniem programowania matematycznego, sformułowanym dla liniowych ograniczeń na zmienne decyzyjne. W praktyce, dla zagadnień tego typu, jako funkcję celu  $Q(\cdot)$  przyjmuje się np. wewnętrzną stopę zwrotu IRR z portfela (*Internal Rate of Return*) lub też tzw. składaną stopę zwrotu RCY dla zadanego horyzontu inwestycyjnego (*Realized Compound Yield*). Niekiedy dokonuje się również aproksymacji nieliniowej funkcji celu funkcją liniową ze względu na zmienne decyzyjne  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), sprowadzając w ten sposób zagadnienie (59)-(62) do całkowitoliczbowego liniowego problemu optymalizacyjnego; por. Dahl, Meeraus, Zenios (1993). Powyższe uwagi, dotyczące formułowania funkcji celu  $Q$ , odnoszą się zresztą do całej klasy modeli immunizacyjnych – a nie tylko do analizowanego powyżej modelu czynnikowego.

Ponadto, często wygodniej jest formułować zadanie wyboru portfela zimmunizowanego jako optymalizację – nie ze względu na ilości  $x_i$  obligacji  $O_i$  w portfelu  $\mathbf{P}$  – a ze względu na współczynniki udziału  $w_i \in [0, 1]$  tych obligacji. Na przykład, jak wiadomo, stopa zwrotu z portfela  $\mathbf{P}$  obligacji, rozpatrywana dla zadanego horyzontu czasowego jest bezpośrednio równa kombinacji wypukłej (tj. ze współczynnikami  $w_i$ ) stóp zwrotu z poszczególnych obligacji wchodzących w skład tego portfela. Tak więc biorąc pod uwagę zależności (52)-(54) oraz (55)-(56), zagadnienie (59)-(62) można sprowadzić do następującej postaci:

$$Q(w_1, w_2, \dots, w_n) \xrightarrow{\{w_i\}} MAX \quad (63)$$

$$\text{przy ograniczeniach } \sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (64)$$

$$\sum_{i=1}^n D_{fi} w_i = D_{fL}, \quad \forall f = 1, \dots, m, \quad (65)$$

$$\sum_{i=1}^n V_{fi} w_i \geq V_{fL}, \quad \forall f = 1, \dots, m. \quad (66)$$

Zauważmy, że w sformułowanym powyżej zadaniu nie występuje w postaci jawnej warunek konieczny (60) immunizacji. A więc aby zagadnienia (59)-(62) i (63)-(66) były całkowicie równoważne, po rozwiązaniu zadania (63)-(66) – tj. po wyznaczeniu optymalnych wartości współczynników udziału  $\hat{w}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – należy jeszcze dodatkowo wyznaczyć optymalne ilości  $\hat{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) obligacji  $O_i$  w portfelu  $\mathbf{P}$  – według wzoru (54), tj.  $\hat{x}_i = \hat{w}_i P_L / P_i$ . Zachodzić będzie wówczas

$$\sum_{i=1}^n \hat{x}_i P_i = \sum_{i=1}^n \hat{w}_i P_L = P_L \sum_{i=1}^n w_i = P_L, \quad (67)$$

a więc warunek konieczny immunizacji (60) będzie spełniony.

Oczywiście z powodów praktycznych (na rynku nie można kupić ułamkowej liczby obligacji), wyznaczone w ten sposób optymalne liczby  $x_i$  obligacji należy przybliżyć do najbliższych liczb całkowitych. Stąd, uzyskane w powyższy sposób

rozwiązanie analizowanego zagadnienia – będzie jedynie suboptymalne; niekiedy – być może nawet dosyć odległe od ściśle optymalnego rozwiązania zagadnienia całkowitoliczbowego typu (59)-(62).

Na zakończenie warto podkreślić, że pominięcie niektórych ze sformułowanych powyżej ograniczeń, np. dotyczących immunizacji rozpatrywanego portfela ze względu na wybrany czynnik wspólny  $F_f$  (tj. dla ustalonego  $f = f_0$ ) prowadzi do aktywnego zarządzania portfelem obligacji ze względu na ten właśnie czynnik. Załóżmy, na przykład, że dla rozpatrywanego problemu immunizacji zidentyfikowano czynnik  $F_1$  jako czynnik ogólnego poziomu stóp procentowych  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ). Jak już wcześniej wspomnieliśmy, w praktyce oznaczać to będzie, że ładunki czynnikowe  $\alpha_{1t}$  mają dla wszystkich stóp  $r_t$  wartości dodatnie. Tak więc wzrost czynnika  $F_1$  powoduje jednoczesny wzrost wszystkich stóp procentowych  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ); natomiast spadek czynnika  $F_1$  - wywołuje spadek tych stóp; por. Rys. 3 (*czynnik poziomu*).

W takiej sytuacji, gdy dysponujemy wiarygodnymi danymi, że wszystkie stopy procentowe na przykład spadną, to możemy "uwolnić" immunizację swego portfela ze względu na czynnik  $F_1$ . Oznaczać to będzie pominięcie w ograniczeniach (61), (62) modelu - indeksu  $f = 1$ . To znaczy, portfela  $\mathbf{P}$  nie immunizujemy ze względu na czynnik  $F_1$  ponieważ spodziewamy się, jak czynnik ten będzie się zachowywał w przyszłości, dla zadanego horyzontu czasowego. W miejsce immunizacji ze względu na pierwszy czynnik, możemy natomiast zastosować strategię aktywną polegającą na zakupie obligacji długoterminowych, ponieważ oczekujemy spadku ogólnego poziomu stóp procentowych.

Natomiast immunizację ze względu na pozostałe dwa czynniki, tj. czynnik nachylenia  $F_2$  oraz czynnik krzywizny  $F_3$  - pozostawiamy w mocy, ponieważ nie jesteśmy pewni czy spodziewane przesunięcie krzywej dochodowości  $TS$  w dół nastąpi w sposób równomierny, to znaczy czy będzie to przesunięcie równoległe o stałą wartość  $dr = const(t)$ ;  $t = 1, \dots, T$ . W ten sposób, spodziewając się ogólnego spadku stóp procentowych i stosując w związku z tym odpowiednią strategię aktywną, zabezpieczamy się jednocześnie przed ryzykiem zmiany kształtu struktury terminowej stóp procentowych. Można oczekiwać, że zastosowanie takiego właśnie postępowania, polegającego na powiązaniu aktywnej strategii zarządzania portfelem ze strategią pasywną, dotyczącą częściowej immunizacji (tj. ze względu na wspomniane ryzyko kształtu), będzie źródłem dodatkowych zysków, w porównaniu ze strategią całkowicie pasywną. Strategia całkowicie pasywna jest w analizowanym przypadku określona przez model (59)-(62), rozpatrywany dla wszystkich zidentyfikowanych czynników  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ) dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych.

Oczywiście, przedstawione powyżej postępowanie będzie uzasadnione, o ile nasze prognozy co do spodziewanego „ruchu” krzywej dochodowości w dół się spełnią. Oznacza to, że dokonując immunizacji naszego portfela inwestycyjnego ze względu na ryzyko kształtu, musimy jednocześnie zaakceptować określone ryzyko zmiany ogólnego poziomu stóp procentowych.

Reasumując, można stwierdzić, że przedstawiony powyżej czynnikowy model immunizacji i optymalizacji portfela obligacji oferuje nam daleko szerszy wachlarz możliwości w porównaniu z modelami klasycznymi, wykorzystującymi koncepcję Macaulay'a parametrów duration i wypukłości obligacji; bądź tylko pewne modyfikacje tej koncepcji zaproponowane np. przez Fishera i Weila (1977), Eltona i Grubera (2003), czy Zarembę i Smoleńskiego (2000). W przypadku modelu czynnikowego możemy bowiem immunizować nasz portfel inwestycyjny nie tylko ze względu na wszystkie zidentyfikowane czynniki dynamiki zmian stóp procentowych; możemy również samodzielnie (tj. według naszego uznania) wybierać te czynniki, które mają podlegać immunizacji. A to już oznacza duży postęp w rozpatrywanej dziedzinie zarządzania ryzykiem inwestycyjnym.

## Dodatek

### D.1. Procedury numerycznego rozwiązywania zadania analizy czynnikowej

Rozpatrywany w punkcie 3 czynnikowy model (13) dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych miał postać:

$$r_t = \bar{r}_t + \sum_{f=1}^m \alpha_{tf} F_f + \alpha_t \varepsilon_t, \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad (68)$$

gdzie  $F_f$  - czynniki wspólne ( $f = 1, \dots, m$ ),  $\varepsilon_t$  - czynniki swoiste ( $t = 1, \dots, T$ ),  $\alpha_{tf}$  - ładunek czynnika wspólnego  $F_f$  w zmiennej  $r_t$ ,  $\alpha_t$  - ładunek czynnika swistego w zmiennej  $r_t$ .

W procedurze numerycznej identyfikacji liniowego modelu czynnikowego (68) istotną rolę odgrywają wartości

$$h_t^2 = \alpha_{t1}^2 + \dots + \alpha_{tf}^2 + \dots + \alpha_{tm}^2, \quad (69)$$

gdzie  $h_t^2$  - to tzw. *zasób zmienności wspólnej* zmiennej  $r_t$  (*communality*). Bezpośrednio z modelu (68) wynika, że

$$Var(r_t) = \sigma_t^2 = h_t^2 + \alpha_t^2, \quad \forall t = 1, \dots, T. \quad (70)$$

Zasób zmienności wspólnej  $h_t^2$ , będący sumą kwadratów współczynników kowariancji  $\alpha_{tf}$  wszystkich czynników wspólnych  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ) ze zmienną  $r_t$ , jest więc pewną miarą określającą jaka część całkowitej zmienności zmiennej  $r_t$  jest wyjaśniana przez czynniki wspólne. Wynika to stąd, że całkowita zmienność tej zmiennej reprezentowana jest przez jej wariancję  $Var(r_t)$ . Podobnie, wartość  $\alpha_t^2$  reprezentuje *zasób zmienności swistej* zmiennej  $r_t$  - wyjaśnianej przez czynnik swoisty  $\varepsilon_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ).

Podstawiając na przekątnej głównej macierzy kowariancji  $\mathbf{R}$  o postaci (11) w miejsce jedynek, wartości zasobów zmienności wspólnych  $h_t^2$  - otrzymamy tzw. zredukowaną macierz kowariancji  $\mathbf{R}^*$ ; por. Tabela 5.

Tabela 5. Postać zredukowanej macierzy kowariancji  $\mathbf{R}^*$ , gdzie  $h_t^2 = \sum_{f=1}^m \alpha_{tf}^2$ .

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} h_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1T} \\ \sigma_{21} & h_2^2 & \cdots & \sigma_{2T} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{T1} & \sigma_{T2} & \cdots & h_T^2 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Uwzględniając wszystkie przedstawione powyżej założenia co do analizowanego liniowego modelu czynnikowego (68) można wykazać, że zachodzi (Koronacki, Ćwik, 2005)

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}_s\mathbf{A}_s^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}_s^2. \quad (72)$$

Powyższe równanie stanowi reprezentację macierzową modelu czynnikowego (68). Z równania tego wynika, że zadanie analizy czynnikowej sprowadza się w zasadzie do rozłożenia macierzy kowariancji zmiennych  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) na dwie addytywne składowe. Pierwsza z tych składowych zależy wyłącznie od ładunków czynników wspólnych  $\alpha_{tf}$ , natomiast druga - od ładunków czynników swoistych  $\alpha_t$ . W tym sensie równania (68) i (72) są sobie równoważne. Biorąc teraz pod uwagę, że dla zredukowanej macierzy kowariancji  $\mathbf{R}^*$  o postaci (71) mamy  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \mathbf{A}_s^2$ , z zależności (72) otrzymamy następujące *podstawowe równanie analizy czynnikowej* (Harman, 1967):

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^T. \quad (73)$$

Wyznaczenie macierzy ładunków czynnikowych  $\mathbf{A}$  (o wymiarze  $T \times m$ ) spełniającej równanie (73) ma podstawowe znaczenie dla rozwiązania rozpatrywanego problemu. Zauważmy, że mając dane ładunki  $\alpha_{tf}$  ( $t = 1, \dots, T; f = 1, \dots, m$ ) czynników wspólnych możemy łatwo - na podstawie wzorów (69), (70) - wyznaczyć ładunki  $\alpha_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) czynników swoistych, a tym samym - macierz  $\mathbf{A}_s$  o postaci (23). Macierz ta jest macierzą diagonalną - na jej przekątnej głównej wystarczy więc podstawić wartości

$$\alpha_t = \sqrt{\sigma_t^2 - h_t^2}; \quad t = 1, \dots, T, \quad (74)$$

co wynika bezpośrednio ze wzoru (70) oraz z założenia, że przyjmujemy  $\alpha_t > 0$ .

Na podstawie znajomości macierzy  $\mathbf{A}$ , znajomości wyjściowej macierzy kowariancji  $\mathbf{R}$  oraz przy pewnych dodatkowych założeniach - można z kolei wyprowadzić następującą zależność określającą wartość macierzy czynników wspólnych  $\mathbf{F}$  o postaci (24):

$$\mathbf{F} = \mathbf{X} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} . \quad (75)$$

Mając wyznaczoną macierz czynników wspólnych  $\mathbf{F}$  oraz zdefiniowany model czynnikowy (20) (tj. ładunki czynników wspólnych i swoistych określone) możemy - bezpośrednio z tego modelu - wyznaczyć wartości  $\varepsilon_{rt}$  macierzy czynników swoistych  $\mathbf{E}$  o postaci (25). Stanowi to etap końcowy analizy czynnikowej rozpatrywanego zagadnienia.

Na zakończenie powyższych rozważań należy podkreślić, że rozwiązanie podstawowego równania analizy czynnikowej jest zagadnieniem złożonym; ze wzorów (69), (71) i (73) wynika bowiem, że równanie to jest nieliniowym równaniem macierzowym o skomplikowanej strukturze. Zagadnienie to nie ma (w ogólnym przypadku) analitycznego rozwiązania. Warto również zauważyć, że nie istnieje jednoznaczne rozwiązanie tego problemu. Można mianowicie łatwo sprawdzić, że jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  spełnia to równanie, to równanie to jest również spełnione przez każde przekształcenie ortogonalne  $\mathbf{A}\mathbf{P}$  tej macierzy; gdzie  $\mathbf{P}$  - dowolna macierz ortogonalna o wymiarze  $(m \times m)$ .

Wynika stąd, że istnieje wiele metod rozwiązywania równania analizy czynnikowej (73), w których dla wyznaczenia macierzy  $\mathbf{A}$  (z określonej klasy rozwiązań) stosuje się pewne dodatkowe kryteria. Najpowszechniej stosowaną metodą jest w rozpatrywanym przypadku tzw. *metoda głównego czynnika* Hotellinga. Poniżej, przedstawimy skrótowo podstawową ideę tej metody; bardziej obszerny opis zawiera m.in. praca Jakubowskiego (2003).

A mianowicie, posługując się wzorem (69) na zasób zmienności wspólnej  $h_t^2$  zmiennej  $r_t$  - możemy wyznaczyć tzw. *ogólną zmienność wspólną*, charakteryzującą wszystkie zmienne  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ), tj.

$$V = \sum_{t=1}^T h_t^2 = \sum_{t=1}^T \left( \sum_{f=1}^m a_{tf}^2 \right) = \sum_{f=1}^m \left( \sum_{t=1}^T a_{tf}^2 \right) = \sum_{f=1}^m V_f , \quad (76)$$

gdzie  $V_f = \sum_{t=1}^T a_{tf}^2$  . (77)

W powyższym wzorze przez  $V_f$  oznaczono więc część ogólnej zmienności wspólnej  $V$ , jaka wyjaśniana jest przez czynnik wspólny  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ). Zauważmy, że wartość  $V_f$  jest równa sumie kwadratów współczynników kowariancji (tj. kwadratów ładunków czynnikowych) danego czynnika  $F_f$  ze wszystkimi zmiennymi  $r_t$ ;  $t=1, \dots, T$ . Wskaźnik  $V_f$  jest więc miarą udziału czynnika  $F_f$  w wyjaśnianiu wszystkich wzajemnych korelacji między rozpatrywanymi zmiennymi wyjściowymi  $r_t$ ;  $t=1, \dots, T$ .

Podstawowa idea metody głównego czynnika polega na takim doborze ładunków czynników wspólnych  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ), aby udział  $V_f$  tych czynników w wyjaśnianiu ogólnej zmienności wspólnej  $V$  był malejący. A dokładniej, postępowanie rozpoczyna się od określenia ładunków czynnika pierwszego  $F_1$ , którego udział  $V_1$  w ogólnej zmienności  $V$  powinien być maksymalny tj.  $V_1 = \hat{V}_1$ . Następnie dobiera się ładunki czynnika drugiego  $F_2$  tak, aby udział  $V_2$  tego czynnika w wyjaśnianiu pozostałej zmienności wspólnej (tj.  $V - \hat{V}_1$ ) był maksymalny, przy określonych uprzednio ładunkach czynnika pierwszego; itd.

W praktyce, metodę głównego czynnika stosuje się sposób iteracyjny. To znaczy najpierw zadaje się pewną początkową wartość  $h_t^2$  zasobów zmienności wspólnej dla każdej ze zmiennych  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ). Następnie, dla zadanej w ten sposób macierzy  $\mathbf{R}^*$  - stosuje się powyższą metodę w celu wyznaczenia ładunków  $\alpha_{tf}$  dla wszystkich czynników  $F_1, F_2, \dots, F_m$ ; po czym dokonuje się modyfikacji wartości  $h_t^2$  według wzoru (69); tj.

$$(h_t^2)^{i+1} = \sum_{f=1}^m (\alpha_{tf}^2)^i, \quad t = 1, \dots, T, \quad \text{gdzie } i - \text{ numer iteracji, } i = 1, 2, 3, \dots$$

Można wykazać (Harman, 1967), że zastosowanie metody głównego czynnika na każdym z etapów powyższego procesu iteracyjnego sprowadza się do wyznaczenia (dla kolejno zadawanych wartości  $h_t^2$ ) wartości własnych  $\lambda_t$  oraz odpowiadających im wektorów własnych  $\mathbf{w}_t$  zredukowanej macierzy kowariancji  $\mathbf{R}^*$ ;  $t = 1, \dots, m, \dots, T$ . Dowodzi się przy tym, że w punkcie zbieżności zastosowanej procedury tylko pierwszych  $m$  wartości własnych  $\lambda_t$  jest dodatnich; pozostałe zaś wartości  $\lambda_t$  są równe zero (w przybliżeniu); tj.

$$\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_m > 0, \quad \lambda_{m+1} = 0, \dots, \lambda_T = 0.$$

Innymi słowy, zredukowana macierz kowariancji  $\mathbf{R}^*$  staje się – na etapie końcowym omawianej procedury - macierzą dodatnio półokreśloną, przy czym rząd tej macierzy jest równy  $m$ . Dla wartości ładunków  $\alpha_{tf}$  mamy wówczas:

$$\alpha_{tf} = \frac{w_{tf}}{\|\mathbf{w}_f\|} \sqrt{\lambda_f}, \quad t = 1, \dots, T, \quad f = 1, \dots, m, \quad (78)$$

gdzie  $w_{tf}$  - t-ta składowa wektora własnego  $\mathbf{w}_f$ , odpowiadającego niezerowej wartości własnej  $\lambda_f$  macierzy  $\mathbf{R}^*$ .

Rozpatrując wyniki końcowe analizy czynnikowej bierze się przede wszystkim pod uwagę procentowy udział  $P_f$  poszczególnych czynników wspólnych  $F_f$  w wyjaśnianiu ogólnej zmienności wspólnej  $V$  danej wzorem (76), tj.

$$P_f = (V_f / V) \times 100\%, \quad f = 1, \dots, m.$$



Dokonując analizy uzyskanych wyników, wyznacza się również tzw. *zasoby globalnej zmienności*  $V_{glob}$  zbioru zmiennych wyjściowych  $r_1, r_2, \dots, r_T$ , określone przez sumę wariancji  $\sigma_i^2$  tych zmiennych; tj.

$$V_{glob} = \sum_{t=1}^T \sigma_t^2. \quad (79)$$

Następnie możemy określić procentowy udział zasobów ogólnych zmienności wspólnej  $V$  w globalnych zasobach zmienności  $V_{glob}$ , tj.

$$P_g = (V / V_{glob}) \times 100\%. \quad (80)$$

Dany wzorem (80) procentowy wskaźnik  $P_g$  określa więc poziom dokładności z jakim - zgodnie z wprowadzonym modelem czynnikowym - układ skorelowanych zmiennych wyjściowych  $r_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) może być przybliżony zbiorem ortogonalnych czynników wspólnych  $F_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ). Jest to prawdą przy założeniu, że w analizowanym modelu czynnikowym pominiemy czynniki swoiste  $\varepsilon_i$ ; na przykład w celu uproszczenia rozważań.

W powyższym kontekście, interesująca jest interpretacja niezerowych wartości własnych  $\lambda_f$  zredukowanej macierzy kowariancji  $\mathbf{R}^*$ . Otóż, z zależności (77) i (78) – po prostych przekształceniach – otrzymamy, że  $V_f = \lambda_f$  ( $f = 1, \dots, m$ ). Wartość własna  $\lambda_f$  jest więc liczbowo równa zasobom zmienności wspólnej  $V_f$  wyjaśnianym przez czynnik  $F_f$ . Tak więc, biorąc pod uwagę zależności (76), (79) i (80) – dla procentowego wskaźnika  $P_g$  mamy

$$P_g = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_f + \dots + \lambda_m}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_f^2 + \dots + \sigma_T^2} \times 100\%.$$

Opisana metoda analizy czynnikowej jest oprogramowana w wielu komercyjnych pakietach komputerowych przeznaczonych do zaawansowanych obliczeń statystycznych; m. in. w pakiecie STATISTICA oraz w pakiecie STATGRAPHICS - funkcja FACTOR, procedury tzw. rotacji ortogonalnych przestrzeni czynników wspólnych - VARIMAX, QUARTIMAX, i EQUIMAX; por. Jakubowski (2003).

## D.2. Dowód Lematu 1

Pełne sformułowanie Lematu 1, na który powołujemy się w punkcie 5 jest następujące:

**Lemat 1.** Załóżmy, że różniczka stochastyczna  $d\mathbf{F}(\tau)$  wektora nieskorelowanych czynników wspólnych wyraża się wzorem:

$$dF_f(\tau) = \mu_f d\tau + \sigma_f dW_f(\tau), \quad \forall f = 1, \dots, m, \quad (81)$$

gdzie  $\mu_f$  - współczynnik dryfu,  $\sigma_f$  - współczynnik zmienności, przy czym  $\mu_f$ ,  $\sigma_f$  są danymi stałymi;  $W_f(\tau)$  - standardowy proces stochastyczny Wienera, tj. proces gaussowski o przyrostach niezależnych i parametrach  $W_f \sim N(0, \tau)$ .

Wówczas różniczka stochastyczna  $Itô$  wartości bieżącej  $P(\mathbf{F})$  obligacji wynosi:

$$dP(\mathbf{F}) = dP(F_1, \dots, F_m) = \sum_{f=1}^m \frac{\partial P}{\partial F_f} dF_f + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} (dF_f)^2. \quad (82)$$

**Dowód.** Wykażemy, że wzór (82) wynika z Lematu  $Itô$  sformułowanego dla wektorowych procesów stochastycznych; Sobczyk (1996), s. 132. A mianowicie, przy przyjętych przez nas założeniach co do wektorowego procesu  $\mathbf{F}(\tau)$  oraz o różniczkę stochastycznej  $d\mathbf{F}(\tau)$  danej wzorem (81) - z Lematu  $Itô$  mamy: dla dowolnej, ciągłej wraz z drugimi pochodnymi, nielosowej funkcji  $P[\mathbf{F}(\tau), \tau]$ , różniczka stochastyczna tej funkcji wyraża się wzorem

$$dP[\mathbf{F}(\tau), \tau] = \left( \frac{\partial P}{\partial \tau} + \sum_{f=1}^m \mu_f \frac{\partial P}{\partial F_f} + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \sigma_f^2 \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} \right) d\tau + \sum_{f=1}^m \sigma_f \frac{\partial P}{\partial F_f} dW_f \quad (83)$$

gdzie  $\mu_f, \sigma_f$  - współczynniki równania (81).

Jak można zauważyć, różniczka  $dP$  wartości bieżącej obligacji składa się z członu deterministycznego stojącego przy  $d\tau$ , odpowiadającego za ewolucję w czasie (tzw. dryf) tej wartości oraz z członu stochastycznego, obrazującego za pomocą różniczek  $dW_f$  ( $f=1, \dots, m$ ) procesów Wienera - wpływ czynników losowych na przebieg tej ewolucji. Z (83), po przekształceniach, otrzymamy

$$dP[\mathbf{F}(\tau), \tau] = \frac{\partial P}{\partial \tau} d\tau + \sum_{f=1}^m \frac{\partial P}{\partial F_f} (\mu_f d\tau + \sigma_f dW_f) + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \sigma_f^2 \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} d\tau. \quad (84)$$

Wykorzystamy teraz tzw. prawa mnożenia różniczki stochastycznej  $dW_f(\tau)$  procesu Wienera (por. Weron i Weron, 1998):

$$[dW(\tau)]^2 = d\tau, \quad dW(\tau)d\tau = 0, \quad (d\tau)^2 = 0. \quad (85)$$

Pierwsze dwa z powyższych wzorów są symbolicznym zapisem następujących stochastycznych zbieżności średniokwadratowych

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} [\Delta W(\tau)]^2 = d\tau \quad \text{oraz} \quad \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} [\Delta W(\tau)\Delta\tau] = 0. \quad (86)$$

Natomiast wzór  $(d\tau)^2 = 0$  jest symbolicznym zapisem oczywistego faktu, że wartość  $(\Delta\tau)^2$  jest nieskończenie małą wyższego rzędu niż  $\Delta\tau$ , tj.  $(\Delta\tau)^2 = o(\Delta\tau)$ ; tak więc wartość ta zanika dla nieskończenie małych przyrostów  $d\tau$ .

Korzystając z praw mnożenia (85), iloczyn  $\sigma_f^2 d\tau$  występujący w ostatnim członie wzoru (84) możemy przedstawić następująco:

$$\sigma_f^2 d\tau = \mu_f^2 (d\tau)^2 + 2\mu_f \sigma_f dW_f d\tau + \sigma_f^2 (dW_f)^2 = (\mu_f d\tau + \sigma_f dW_f)^2. \quad (87)$$

Z (84) i (87) mamy więc

$$dP[\mathbf{F}(\tau), \tau] = \frac{\partial P}{\partial \tau} d\tau + \sum_{f=1}^m \frac{\partial P}{\partial F_f} (\mu_f d\tau + \sigma_f dW_f) + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} (\mu_f d\tau + \sigma_f dW_f)^2.$$

A stąd, wykorzystując wzór (81), otrzymamy

$$dP(\mathbf{F}, \tau) = \frac{\partial P}{\partial \tau} d\tau + \sum_{f=1}^m \frac{\partial P}{\partial F_f} dF_f + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^m \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} (dF_f)^2. \quad (88)$$

Wyprowadzone równanie (88) dotyczy ogólnego przypadku, gdy funkcja  $P(\cdot, \cdot)$  zależy w sposób jawny od czasu bieżącego  $\tau$ . Natomiast dla analizowanej w niniejszym lemacie funkcji  $P = P(\mathbf{F})$ , występująca w tym wzorze pochodna  $\partial P / \partial \tau$  zanika i otrzymujemy szukaną zależność (82); **c.n.d.**

## Bibliografia

- Barber J.R., Cooper M.L. (1996) Immunization using Principal Component Analysis. *Journal of Portfolio Management*, Summer.
- Bierwag G.O. (1987) *Duration Analysis - Managing Interest Rate Risk*. Ballinger Press, Cambridge, Mass.
- Blanco C., Soronow D., Stefiszyn P. (2002) Multi-factor models for forward curve analysis: an introduction to Principal Component Analysis. *Commodities-Now*, June.
- Capiński M., Zastawniak T. (2007) *Mathematics for Finance*. Springer, London.
- Dahl H. (1993) A flexible approach to interest rate risk management. In: *Financial Optimization*. Ed. S.A. Zenios. Cambridge University Press, Cambridge, 189-209.
- Dahl H., Meeraus A., Zenios S.A. (1993) Some financial optimization models – risk management. In: *Financial Optimization*. Ed. S.A. Zenios. Cambridge University Press, Cambridge, 3-36.
- de La Granville O. (2001) *Bond Pricing and Portfolio Analysis*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Elton E.J., Gruber M.J., Brown S.J., Goetzmann W.N. (2003) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley, New York, 6-th Ed.
- Fabozzi F.J., Fong G. (1994) *Advanced Fixed Income Portfolio Management – The State of Art*. Probus Pub. Comp., Chicago.
- Fabozzi F.J. (2006) *Bond Markets - Analysis and Strategies*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J. 2006, 5-th ed.
- Fisher L., Weil R.L. (1971) Coping with the risk of market rate fluctuations - returns to bondholders from naive and optimal strategies. *Journal of Business*, 4, October, 408-431.
- Garbade K. (1986) *Modes of Fluctuations in Bond Yields - an Analysis of Principal Components*. Bankers Trust Company, Money Market Center, New York, June.
- Garbade K. (1989) *Polynomial Representations of the Yield Curve and its Modes of Fluctuations*. Bankers Trust Company, Money Market Center, New York, 53, July.
- Harman H.H. (1967) *Modern Factors Analysis*. Chicago University Press, Chicago, 2-nd ed.
- Haugen R.A. (1996) *Teoria nowoczesnego inwestowania*. WIG-Press, Warszawa.
- Jakubowski A. (2000) Aktywne zarządzanie portfelem obligacji. W: M. Krawczak, A. Miklewski, A. Jakubowski, P. Konieczny, *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym*, Wyd. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, 25, Warszawa, Część II, 49-122.
- Jakubowski A. (2003) Zarządzanie inwestycjami na rynku obligacji. W: Krawczak M., Jakubowski A. et al., *Aktywne Zarządzanie Inwestycjami Finansowymi*, Wyd. EXIT, Warszawa, Rozdz. VI, 269-374.

- Jakubowski A. (2009) *Zarządzanie portfelem obligacji z wykorzystaniem nowoczesnych metod analizy stochastycznej*. Raport Badawczy IBS PAN, RB/73/2009, Warszawa
- Jakubowski A. (2011) Immunizacja i optymalizacja portfela obligacji. *Studia Ekonomiczne*, UE w Katowicach, 96, 29-55.
- Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. (2003) *Matematyka finansowa – Instrumenty pochodne*. WNT, Warszawa.
- Kaufman G.C., Bierwag G.O., Toevs A. (1983) *Innovations in Bond Portfolio Management - Duration Analysis and Immunization*. JAI Press, Greenwich, Conn.
- Koronacki J., Ćwik A. (2005) *Statystyczne modele uczące się*. WNT, Warszawa.
- Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1995) *Analiza czynnikowa struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji w Polsce*. Raport Badawczy IBS PAN, PSWD 5/95, Warszawa.
- Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1996) *Analiza czynnikowa i modelowanie struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji z długim horyzontem*. Raport Badawczy IBS PAN, PSWD 13/96, Warszawa.
- Litterman R., Scheinkman J. (1991) Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income*, 1, 1, June, 54-61.
- Luenberger G. (2003) *Teoria inwestycji finansowych*. PWN, Warszawa.
- Mattellini L., Priaulet P. (2003) *Fixed Income securities*. Wiley.
- Sobczyk K. (1996) *Stochastyczne równania różniczkowe*. WNT, Warszawa.
- Trzpiot G. (2009) *Wielowymiarowe metody statystyczne w analizie ryzyka inwestycyjnego*. PWE, Warszawa, Rozdz. 1.
- Tuckman B. (2002) *Fixed Income Securities*. Wiley.
- Utkin J. (2005) *Obligacje i ich portfele - wycena, wrażliwość, strategie*. Wyd. SGH, Warszawa.
- Weron A., Weron R. (1998) *Inżynieria finansowa*. WNT, Warszawa.
- Zaremba L.S., Smoleński W.H. (2000) Optimal portfolio choice under a liability constraint. *Annals of Operational Research*, 97, 131-141.
- Zenios S.A. (1993) *Financial Optimization*. Cambridge University. Press, Cambridge.

### A factor model for bond portfolio management

**Abstract.** The paper deals with the model of bond portfolio management with respect to - the risk of unanticipated changes of interest rates level as well as - the risk of unexpected fluctuations of a yield curve shape; where the yield curve is a graphical representation of the so called term structure of the market spot rates. The mathematical description of factor analysis of the dynamics of interest rates term structure fluctuations is given and the definitions of bond factor duration and bond factor convexity are presented. Then, the factor model of bond portfolio immunization and optimization is considered. In particular, the possibility of identification of three uncorrelated common factors affecting the yield curve shape changes in time: the level factor, the steepness factor and the curvature factor – is taken into account. In case of the factor model presented, we can independently choose these factors that should be immunized as well as the factors under which the analyzed portfolio will be actively managed.

**Keywords:** factor analysis, term structure, interest rate risk, bond portfolio, immunization and optimization.